文章编号：1673-5862(2017)03-0296-04

运筹学与控制论

广义切换系统的脉冲性质及其稳定性

刘玉忠[1]，尹玉娟[2]
(1. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034；2. 辽宁大学 数学学院，沈阳 110036)

摘　要：广义切换系统是一类重要的混杂动态系统，有着广泛的实际背景。研究了广义切换系统由于非一致的初始条件引起的状态跳变问题，同时讨论了一致初始条件和非一致初始条件下广义切换系统解之间的关系。广义切换系统的每个子系统具有不同的代数约束条件，这类广义切换系统的特点是在每一个切换时刻都有脉冲影响作用于系统。将标称切换系统的多李雅普诺夫方法应用于该类带有脉冲作用的广义切换系统，对每一个子系统，引入类李亚普诺夫函数(Lyapunov-like Function)，基于类李亚普诺夫函数和多李亚普诺夫函数方法，得到了系统稳定的充分条件。

关 键 词：切换系统；广义切换系统；脉冲控制；多李雅普诺夫函数
中图分类号：TP13　　**文献标志码**：A
doi：10.3969/j.issn.1673-5862.2017.03.007

Impulsiveproperty of switched singular systems and its stability

LIU Yuzhong, *YIN yujuan*
(1. College of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China; 2. College of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110032, China)

Abstract: Switched singular system is one of the important hybrid dynamical systems. In this paper the problem of state jumps due to inconsistent initial conditions is addressed for impulsive and switched singular systems. The relationship between the solution with inconsistent initial condition and the one with consistent initial condition is discussed as well. The switched singular systems of each subsystem with different algebraic constrain conditions is modeled by switched singular systems with impulsive effects on switching instants. Multiple Lyapunov function approach for normal switched systems is extended to the impulsive and switched singular systems. For each subsystem, the Lyapunov-like function is introduced and the sufficient condition for the systems to be stable is given based on the Lyapunov－like function and Multiple Lyapunov function.

Key words: switched systems; switched singular systems; impulsive control; multiple Lyapunov functions

0 引　言

系统的稳定性是切换系统研究的基本问题。近几十年，切换系统的稳定性受到了许多学者的普遍关注[1-8]. 基于切换系统的特点，多李雅普诺夫方法在研究切换系统稳定性方面得到了广泛地应用。

多李雅普诺夫函数方法最早在文献[1]提出. 众所周知，如果李雅普诺夫函数在切换时刻的值是减

收稿日期：2017-06-05。
基金项目：辽宁省教育厅科学研究一般项目(L2014433)。
作者简介：刘玉忠(1963-)，男，辽宁新宾人，沈阳师范大学教授，博士；**通信作者**：尹玉娟(1964-)，女，辽宁沈阳人，辽宁大学教授，博士。

少的，那么切换系统是稳定的。在文献[2]中引入了类-李雅普诺夫函数，并且每个子系统的类-李雅普诺夫函数在激活的子系统左端值是减少的就能保证切换系统的稳定性。文献[6－7]推广了上述结果，即允许李雅普诺夫函数的值在被激活子系统适当的“增加”仍能保证系统的稳定性。文献[8]引入了带有松弛变量的切换李雅普诺夫函数，给出系统渐近稳定的充分条件，该条件表示成易于求解的线性矩阵不等式的形式（LMI).

广义系统是一类更一般化并有着广泛应用背景的动力系统，它大量出现在许多实际的系统模型中，例如电力系统、能源系统、航天工程、化学过程、经济系统、社会系统和生物系统等[9-10]。本文将多李雅普诺夫函数方法应用于具有脉冲作用的广义切换系统，把各子系统的代数约束描述为脉冲作用的广义切换系统，并给出系统稳定的充分条件。

1　预备知识

1.1　初始状态的描述

考虑广义系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t),\tag{1}$$

这里：$x(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量；$E,A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times p}$ 是常矩阵。设 $\mathrm{rank}(E)=q<n$，易知，系统(1)解存在的充要条件是系统(1)是正则的，即 $\det(sE-A)\equiv 0$，其中 s 是复数。

若系统(1)是正则的，那么存在非奇异矩阵 Q、P 使得

$$QEP=\begin{bmatrix}I&0\\0&N\end{bmatrix},\ QAP=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&I\end{bmatrix},$$

这里：$A_1\in\mathbf{R}^{q\times q}$；$N\in\mathbf{R}^{(n-q)\times(n-q)}$；$I$ 是单位矩阵，从而系统(1)受限等价于下面的系统：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=A_1x_1(t),\quad x_1(0^-)=x_{10},\\&N\dot{x}_2(t)=x_2(t),x_2(0^-)=x_{20}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这里：$[x_1^{\mathrm{T}}\quad x_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=P^{-1}x$；$[x_{10}^{\mathrm{T}}\quad x_{20}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=P^{-1}x_0$。

由式(2)得

$$\left.\begin{aligned}&x_1(t)=e^{A_1t}x_1(0^-)\\&x_2(t)=-\sum_{i=1}^{h}\delta^{(i-1)}N^ix_2(0^-)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

显然，如果 $N\neq 0$，那么只要 $x_2(0^-)\neq 0$，任意初始状态均会对系统产生脉冲作用。下面只考虑没有脉冲作用的情形，即 $N=0$。

由式(3)和式(2)可得

$$\left.\begin{aligned}&x(0^-)=P\begin{bmatrix}x_1(0^-)\\x_2(0^-)\end{bmatrix}\\&x(0^+)-x(0^-)=P\begin{bmatrix}0\\-x_2(0^-)\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

因此

$$x(0^+)=x(0^-)+P\begin{bmatrix}0\\-x_2(0^-)\end{bmatrix}=x(0^-)+P\begin{bmatrix}0&0\\0&-I\end{bmatrix}P^{-1}x(0^-)=P\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}x(0^-)$$

一般地，对任意的 $t_0>0$，可得到类似的结果，即

$$x(t_0^+)=P\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}x(t_0^-)\tag{5}$$

1.2　一致初始条件和非一致初始条件

假设 $x(t;t_0,x_0)$ 是系统(1)满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解。如果 x_0 是一致的，那么 $x(t;t_0,x_0)$ 是存在的；如果 x_0 是非一致的，那么在 $t=t_0$ 时刻存在一个状态 $x(t;t_0,x_0)$ 的跳跃。利用文献[11]介绍的前向和后向欧拉方法，可知存在一致初始条件 $\hat{x}_0=(\hat{x}_{10},\hat{x}_{20})$，使得 $x(t;t_0,\hat{x}_0)$ 是最靠近 $x(t;t_0,x_0)$ 的解。现在给出非一致初始条件 x_0 和一致初始条件 $\hat{x}_0=(\hat{x}_{10},\hat{x}_{20})$ 之间的关系。

实际上,对于非一致初始状态 $x_0=x(0^-)$,有 $x(t;t_0,x_0)=x(t;t_0,\hat{x}_0)$,这里 $\hat{x}_0=x(0^+)=\lim\limits_{h\to 0+}x(t+h;t_0,x_0)$是一致初始状态并且 $x(t;t_0,\hat{x}_0)$是连续的。当 $N=0$ 时,有 $x(0^+)=P\,[I\quad 0]^{\mathrm{T}}x_1(0)-P\,[0\quad I]^{T}B_2u(0^+)$,从而

$$x(0^+)=P\,[I\quad 0]^{\mathrm{T}}x_1(0)=P\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}x(0^-)+P\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}QBu(0^-)$$

如果 $u=0$,那么上述方程化为 $x(0^+)=P\ [I\quad 0]^{\mathrm{T}}x_1(0)=P\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}x(0^-)$

对应于非一致初始状态 x_0 的一致初始状态 $\hat{x}_0$ 为

$$\hat{x}_0=\begin{cases}P\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}x(0^-)-P\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}QBu(0^-), & u\neq 0\\ P\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}x_0, & u=0\end{cases}\tag{6}$$

2 稳定性分析

考虑如下广义切换系统

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t)=A_{\sigma(t)}x(t)\tag{7}$$

其中:$\sigma(t):\mathbf{R}^+\to\Lambda=\{1,2,\cdots,m\}$是分段常值右连续的切换信号;$x(t)\in D\subset\mathbf{R}^n$ 是状态;D 是 $\mathbf{R}^n$ 空间上的子流形;$E_i,A_i\in R^{n\times n}$是常矩阵。假设每个子系统(E_i,A_i)都是正则无脉冲的,$\mathrm{rank}(E_i)=r$,并且存在矩阵 Q_i,P_i 使得

$$Q_iE_iP_i=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},Q_iA_iP_i=\begin{bmatrix}A_{i1} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\tag{8}$$

为简单起见,假设 $x_{i_k}(t;t_0,x_0)$是系统 $E_{i_k}\dot{x}_{i_k}(t)=A_{i_k}x_{i_k}(t)$满足初始条件 $x_{i_k}(t_0)=x_0$. 的解。令 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$是系统(7)在切换信号 $\sigma(t)$下满足条件 $x(t_0)=x_0$ 的解,x_0 是一致初始条件。系统的解按如下方式展开:点 $P_t=(t,x(t))$从(t_0,x_0)出发沿曲线$\{(t,x(t)):t\geqslant t_0,x(t)=x_{i_0}(t;t_0,x_0)\}$运行直至切换时刻 t_1,令 $x_1^+=P_{i_1}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P_{i_1}^{-1}x_1$,这里 $x_1=x_{i_0}(t_1)$;然后点 P_t 又从 (t_1,x_1^+)出发沿曲线$\{(t,x(t)):t\geqslant t_1,x(t)=x_{i_1}(t;t_1,x_1^+)\}$运行直至切换时刻 $t_2\cdots$。一般地,当 $t=t_k$ 时,有 $x_k=x_{i_{k-1}}(t_k)$,$x_k^+=P_{i_k}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P_{i_k}^{-1}x_k$,然后系统从$(t_k,x_k^+)$出发沿着曲线$\{(t,x(t)):t\geqslant t_k,x(t)=x_{i_k}(t;t_k,x_k^+)\}$运行。在上述过程中,假定系统(7) 的解 $x(t)$在 $t_k,k=1,2,\cdots$,是左连续的,即 $x(t_k^-)=\lim\limits_{h\to 0^+}x(t_k-h)=x(t_k)$。

注1 一般地,不同的子系统有不同的代数约束,如果 $x_k^+=x_k,k=1,2,\cdots$,那么,系统(7)就是带有状态跳跃的广义切换系统,所以将上述系统描述成在脉冲时刻具有脉冲作用的广义切换系统更为合理。

考虑如下脉冲广义系统:

$$\begin{aligned}&E_{i_k}\dot{x}(t)=A_{i_k}x(t), && t\neq t_k\\ &x(t_k^+)=P_{i_k}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P_{i_k}^{-1}x(t_k), && t=t_k,k=1,2,\cdots\\ &x(0^-)=x_0\end{aligned}\tag{9}$$

其中切换信号 $\sigma(t)$及矩阵 P_i 同系统(7)。

分别记 $S(\alpha)=\{x:\|x\|=\alpha\}$,$B(\alpha)=\{x:\|x\|<\alpha\}$,$\bar{B}(\alpha)=\{x:\|x\|\leqslant\alpha\}$ 为以原点为中心以 α 为半径的球面,球,以及闭球,记 $S|i$ 为子系统 i 被激活的区间端点的集合,$T=t_0,t_1,\cdots,t_M,\cdots$,$I(T)=\bigcup\limits_{j\in Z+}[t_{2j},t_{2j+1}]$。$(S|i)$是子系统 i 被激活的区间的并集。设$(T)=\{t_0,t_2,t_4,\cdots,\}$,记 $x_S(t;t_0,x_0)$为系统(9)在切换信号 $\sigma(t)$下满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解。

定义2 设 T 是 $\mathbf{R}^+$ 上严格增的序列,称函数 $V:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$ 为广义系统(E,A)的类-李亚普诺夫函数,如果满足下列条件:

1) $\forall t\in I(T)$,有 $\dot{V}(x(t))\leqslant 0$;

2）V 是(T)上单调非增的函数。.

利用上述类-李亚普诺夫函数可以得到下面的较少保守性的稳定性条件。

定理　假设 V_i 是系统(E_i,A_i)的类-李亚普诺夫函数，$i=1,2,\cdots,m$，是所有切换序列的集合。对任意的 $S\in$，$i\in\Lambda$，V_i 是系统(E_i,A_i)在 $S|i$ 上的类-李亚普诺夫函数，那么系统(9)是稳定的。

证明　不失一般性，仅证明 $m=2$ 的情形。

1）选择任意实数 $R>0$，设 $m_i(\alpha)=\min\limits_{x\in S(\alpha)}\{V_i(x)\}$，取 $r_i<R$ 使得 $x\in B(r_i)$时有 $V_i(x)<m_i(R)$。进一步，记 $r=\min\limits_{i\in\{1,2\}}\{r_i\}$，基于上述选择的 R 和 r，有 $x(t)\in B(R)$对任意 $x_0=x(t_0)\in B(r)$成立。

2）选择实数 $\rho_i<r$，使得对任意的 $x\in B(\rho_i)$都有 $V_i(x(t))<m_i(r)$。令 $\rho=\min\{\rho_i\}$，则对任意的 $x_0=x(t_0)\in B(\rho)$，可得 $x(t)\in B(r)$对任意的 $t_0<t\leqslant t_1$ 成立。当 $t=t_1$ 时，系统进行切换并发生状态的跳跃，同时脉冲函数由 $x(t_1)$变成 $x(t_1^+)$，这里 $x(t_1^+)=P_{i_1}\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}P_{i_1}^{-1}x(t_1)$。因此 $\|x(t_1^+)\|\leqslant\|x(t_1)\|$ 成立，并且 $x(t_1^+)\in B(r)$，这里 $x(t_1^+)$是子系统(E_{i_1},A_{i_1})的一致初始状态。于是有 $x(t)\in B(R)$，$t_1<t\leqslant t_2$。特别地，有 $x(t_2)\in B(R)$，$x(t_2^+)\in B(R)$。由 2)可得 $V(x(t_2^+))\leqslant V(x(t_0))$，因此 $x(t)\in B(R)$对任意的 $t>t_0$，$x(t_0)\in B(\rho)$都成立，因此定理得证。

注 2　这个结果是文献[2]中相关结果的推广，文献[2]中研究的广义切换系统在切换时刻没有状态跳跃，然而在实际上，系统状态在切换时刻前后受到不同的代数约束，往往会引起状态跳跃。

3　结　　论

本文研究了非一致初始条件引起的脉冲系统和广义切换系统的状态跳跃问题，利用多李雅普诺夫函数方法对该类系统的稳定性分析，得到了系统稳定的充分条件。

参考文献：

[1] PELETIES P，DECARLO R A. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions[C]// Proceedings of ACC，1991：1679－1684.

[2] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans Automat Contr，1998，43(4)：475－482.

[3] LIBERZON D. Switching in systems and control[M]. Boston：Birkhauser Press，2003.

[4] LIBERZON D，Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine，1999，19(5)：59－70.

[5] BRANICKY M S. Stability of switched and hybrid systems[C]// Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control，Lake Buena Vista，Florida，1994：3498－3503.

[6] HOU L，MICHEL A N，YE H. Stability analysis of switched systems[C]// Proceedings of 35th IEEE CDC，1996：1208－1212.

[7] PETTERSSON S，LENNARTSON B. Stability and robustness for hybrid systems[C]// Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control，1996：1202－1207.

[8] DAAFOUZ J，RIEDINGER P，IUNG C. Stability analysis and control synthesis for switched systems：a switched lyapunov function approach[J]. IEEE Automat Control，2002，47(11)：1883－1887.

[9] DAIL Y. Singular Control Systems[M]. Berlin：Spring-Verlag，1989.

[10] LEWIS F L. A survey of linear sigular systems[J]. Circuits systems signal process，1986，5(1)：3－36.

[11] SINCOVEC R F，ERISMAN A M，YIP E L，et al. Analysis of descriptor systems using numerical algorithms[J]. IEEE Trans Automat Contr，1981，26(1)：139－147