学好基础知识

怎样学好数学概念——看“结构”

人大附中(100080) 陆剑鸣

编者按 陆剑鸣老师的这篇文章告诉我们,学好数学概念的方法之一,是掌握数学概念的“结构”,文章指出一个数学概念的结构,通常包含“成份”和“特征”两个方面.并以一元二次方程的概念为例,介绍了如何看结构.可供同学们学习数学概念时参考.

数学学习离不开概念的学习.有很多同学不懂得也不会“啃概念”,没有掌握学习概念的有效方法.基本概念不扎实,起码的东西没学会,判断、推理、论证便成了无本之木,无源之水.下面以一元二次方程的概念为例,谈谈通过看“结构”学好数学概念的方法.

一、关于“结构”

数学的许多概念,是通过指出它的结构来定义的.

“只含有加、减、乘(包含乘方)运算的代数式叫多项式”;“形如 $y=kx+b(k\neq0,\ k、b$ 为常数)的函数叫 x 的一次函数.”

“结构”的含义,主要有“成份”和“特征”两方面.掌握了“结构”,也就在一定意义上掌握了这些概念.

二、你理解一元二次方程的概念吗？

例1 请判断:方程1:$x^2-3x+1=x^2-2x+2$;方程2:$x^2+3=x^2+3$;方程3:$\frac{x^3}{x}+2x-3=0$ 是一元二次方程吗？

什么叫一元二次方程呢？书上一元二次方程是这样定义的:

(1)等号两边都是整式;(2)含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的方程叫做一元二次方程.

根据这个定义,方程1和方程2符合定义中(1)、(2),方程3可化简为 $x^2+2x-3=0$ 也符合(1)、(2),故许多同学会认为以上三个方程都是一元二次方程.

事实上,方程1移项后化为 $x+1=0$,是一元一次方程;方程2移项后未知数消失了,得 $3=3$,这是一个恒等式.方程3约分化简前它不是整式方程,因此上面三个方程都不是一元二次方程,方程3是分式方程.

可见理解一元二次方程的概念时应加上一点,整式方程整理后若符合(2)才是一元二次方程.

也就是对于整式方程要化简整理后看是否是形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的形式,对于非整式方程,不要整理化简直接肯定它不是一元二次方程.$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 即为一元二次方程的结构.

这里同学们可能产生一个疑问,为什么方程1和方程2必须变形后判断它们是不是一元二次方程,而方程3必须就原方程作出判断呢？

由等式的性质,对于整式方程来说,方程中移项、方程两边乘除不为零的同一个数,得到的新方程与原方程的解相同.所以整式方程可以通过这两种变形,化为某种标准形式,而其它方程,则不能.换句话说,整式方程都有统一的标准形式,作为其结构.如一元一次方程都可化为 $ax+b=0(a\neq0)$ 的形式;一元二次方程都可以化为 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的形式.

可见理解掌握一元二次方程概念时,应从“一般式”去把握.

三、把握结构特征的共性与特性

一元二次方程的共性决定着它的一般解法——公式法.还有许许多多的特殊的一元二次方程,由于它们的特殊性,决定着它们还有简便得多的特殊解法.

(下转第3页)

有理数加减简便运算

浙江省杭州高级中学贡院校区高三(11)班(310003)　王宇峰
指导教师　唐红莉

有理数加减运算是初一学生的一个难点，掌握一些简便运算技巧非常有必要，既可以提高运算的速度还能避免一些错误，但要遵循一定的原则，主要有以下5种类型：

类型一　凑整

例1　计算$\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}-(-2\frac{3}{4})-3\frac{2}{3}$.

解　原式$=\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}+2\frac{3}{4}-3\frac{2}{3}$

$=(\frac{1}{4}+2\frac{3}{4})+(-2\frac{1}{3}-3\frac{2}{3})$

$=3-6$

$=-3$.

变式　计算$3-(+63)-(-259)-(-41)$.

原式$=3-63+259+41$

$=(3-63)+(259+41)$

$=-60+300$

$=240$.　(下转第4页)

(上接第2页)

例2　已知：a、b、c是互不相等的有理数.求证：方程$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$的根也是有理数.

分析1　(从共性的角度)要证明这个方程的根是有理数，由求根公式，只要证明它的判别式在有理数范围内是完全平方式就可以了.

证明1　因为$\Delta=(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=c^2-2ac+a^2-4ab+4ac+4b^2-4bc=(a^2-4ab+4b^2)+(2ac-4bc)+c^2=(a-2b)^2+2c(a-2b)+c^2=(a-2b+c)^2$，又$a$、$b$、$c$是互不相等的有理数，所以方程的两个根都是有理数.

以上证明过程，将判别式整理、分组、配方的过程是不易进行且比较复杂的.

分析2　(从特性的角度)如果我们注意观察，发现这个方程系数之和为0，用换元法就简单多了.

证明2　设$b-c=p$，$c-a=q$，$a-b=s$，则$px^2+qx+s=0$，且$p+q+s=0$，则$\Delta=q^2-4ps=(-p-s)^2-4ps=(p-s)^2$，由已知可推$p$、$q$、$s$是有理数，所以方程的两个根都是有理数.

分析3　在分析2中我们已经注意到了方程系数之和为0，那么显然有一个根为1，再用根与系数的关系证明就容易多了.

证明3　因为$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$，所以$x_1=1$是方程的一个有理根，由根与系数的关系，得$x_2=\frac{a-b}{b-c}$，又a、b、c是互不相等的有理数，所以方程的两个根都是有理数.

例3　已知：关于x的方程$x^3-mx^2-2mx+m^2-1=0$有且只有一个实数根，求m的取值范围.

如果死盯住是一元三次方程这一特特点，解起来就费事了.如果换一个角度，视m为未知数，重新整理为$m^2-(x^2+2x)m+x^3-1=0$，就可以发现它的特征，可以看成是关于m的一元二次方程，解这个方程，

因为$\Delta=(x^2+2x)^2-4(x^3-1)=x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$，所以$m=\frac{(x^2+2x)\pm(x^2+2)}{2}$，$m=x-1$或$m=x^2+x+1$，因为有且只有一个实数根，所以关于$x$的方程$x^2+x+(1-m)=0$无实根，所以$1-4(1-m)<0$，$m<\frac{3}{4}$.

看"结构"是学好数学概念的方法之一.

(责审　韩乐琴)