名师伴你学

怎样学好数学概念——识“两向性”

人大附中(100080) 陆剑鸣

编者按 陆剑鸣老师的文章指出,数学概念通常包含概念的判定和概念的性质两个方面(称为概念的“双向性”),学好数学概念要注意这两个方面,即认识“双向性”.文章以一元二次方程的解和有关“新定义”试题为例,进行说明.以期帮助同学们更好地掌握和运用数学概念.

在文[1]中我们谈了通过看“结构”学好数学概念的方法.这里我们再介绍一种学好数学概念的方法.

任何概念的定义具有“两向性”,即具有“判定定理”和“性质定理”的双重功能,判定定理回答“是不是?”和“是什么?”的问题,如4的平方根是±2,有三个直角的四边形是矩形等等.性质定理回答“有何性质”的问题,如“分式的基本性质”,“平行线的性质”等等.概念的这种“两向性”经常用在推理论证中,从而识“两向性”是学透学好概念的方法之一.

一、识线段中点概念的“两向性”.

线段中点的定义:将一条线段分成两条相等线段的点叫线段的中点.

如图1,

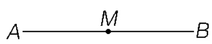

图1

$\because$ M 是 AB 的中点,

$\therefore$ $AM=MB$;

$AM=\frac{1}{2}AB$,

$MB=\frac{1}{2}AB$;

$AB=2AM$, $AB=2MB$.

反过来,

$\because$ $AM=MB$ 或 $AM=\frac{1}{2}AB$ ($MB=\frac{1}{2}AB$)或 $AB=2AM$($AB=2MB$),

$\therefore$ M 是 AB 的中点.

请你仔细体会一下,以上两段推理有什么相同点和不同点呢?

以上两段推理的相同点是:推理的根据都是“线段中点的定义”;不同点是:前者“线段的中点”是已知,推出的结论是图形的性质,用的是定义的“性质定理”性;后者“线段的中点”是结论,它为图形的判定,用的是定义的“判定定理”性.

二、识一元二次方程解的概念的“两向性”.

一元二次方程解的定义:使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是方程的解.

(1)定义作判定定理理解

若 $x=a$ 能使关于 x 的方程左右两边的值相等,则 $x=a$ 是这个方程的解;反之,若 $x=a$ 不能使方程左右两边的值相等,则 $x=a$ 不是方程的解.

例1 若 $a+b+c=0$,则方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个解为 $x=1$.

证明 因为 $a+b+c=0$,当 $x=1$ 代入方程时,有 $a\times1^2+b\times1+c=0$,根据根的定义,$x=1$ 是 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解.

(2)定义作性质定理理解

如果 $x=a$ 是关于 x 的某一方程的解,那么以 a 代替方程中的 x,可使方程左右两边的数值相等;反之,若 $x=a$ 不是方程的解,则 a 不满足方程(以 a 代替方程中的 x,方程左右两边的数值不相等).

例2 不解方程 $x^2+x-3=0$.

(1)求作一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的2倍;

(2)已知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等于零的实数根,求一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的倒数;

(3)已知关于 x 的方程 $ax^2-mx+n=0$ 有两个实数根，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的平方.

解 (1)设所求方程的根为 y，则 $y=2x$.

所以 $x=\dfrac{y}{2}$.

由于 x 是原方程的根，根据根的定义，有 $(\dfrac{y}{2})^2+\dfrac{y}{2}-3=0$.所以 $y^2+2y-12=0$，此方程即为所求方程.

(2)由已知 $x\neq0$，$c\neq0$，设所求方程的根为 y，则 $y=\dfrac{1}{x}$，所以 $x=\dfrac{1}{y}$，根据根的定义，有 $a\left(\dfrac{1}{y}\right)^2+b\left(\dfrac{1}{y}\right)+c=0$，所以 $cy^2+by+a=0$ 为所求方程.

(3)设所求方程的根为 y，则 $y=x^2$.因为 $ax^2-mx+n=0$，所以 $(ax^2+n)^2=(mx)^2$，整理，得 $a^2x^4+(2an-m^2)x^2+n^2=0$，将 $x^2=y$ 代入，得 $a^2y^2+(2an-m^2)y+n^2=0$ 为所求方程.

例 2 求解中，我们巧妙地应用了方程根的定义"性质定理"性，解起来简便又不易出错.

三、识"新定义"中的概念的"两向性".

近几年北京中考压轴题都是"新定义"问题，解决这类问题的关键就是要透彻理解定义，识定义的"两向性".

例 3 (北京 2017 中考，略改)在平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 M，给出如下的定义：若在图形 M 上存在一点 Q，使得 P、Q 两点间的距离小于或等于 1，则称 P 为图形 M 的关联点.

(1)当⊙O 的半径为 2 时，

①在点 $P_1(\dfrac{1}{2},0)$，$P_2(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$P_3(\dfrac{5}{2},0)$ 中，⊙O 的关联点是________.

②点 P 在直线 $y=-x$ 上，若 P 为⊙O 的关联点，求点 P 的横坐标的取值范围.

(2)⊙C 的圆心在 x 轴上，半径为 2，直线 $y=-x+1$ 与 x 轴、y 轴交于点 A、B.若线段 AB 上的所有点都是⊙C 的关联点，求出圆心 C 的横坐标的取值范围.

解析

(1)①根据关联点的定义，要判断一个点是否是一个图形的关联点，只需求出这个点与图形上点的最小距离，然后和 1 比较.这里用的是定义的"判定定理"性.

因为 $OP_1=\dfrac{1}{2}$，$OP_2=1$，$OP_3=\dfrac{5}{2}$，所以点 P_1 与⊙O 上的点的最小距离为 $\dfrac{3}{2}$，点 P_2 与⊙O 上的点的最小距离为 1，点 P_3 与⊙O 上的点最小距离为 $\dfrac{1}{2}$，所以⊙O 的关联点为 P_2 和 P_3.

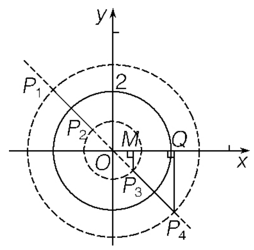

图 2

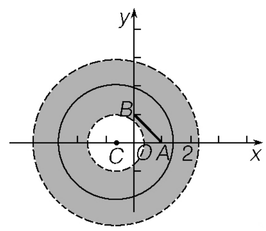

图 3

(1)②我们先考虑⊙O 的关联点，由定义，与⊙O 的距离等于 1 的点在以 O 为圆心，1 或 3 为半径的圆上，如图 2 所示(虚线圆)，与⊙O 的距离小于 1 的点在两个大小同心圆(虚线圆)构成的圆环的内部，设直线 $y=-x$ 与大小同心圆依次交于 P_1、P_2、P_3、P_4，则线段 P_1P_2、P_3P_4 上的点均为⊙O 的关联点.

作 $P_3M\perp x$ 轴于 M，$P_4Q\perp x$ 轴于 Q，由直线 $y=-x$ 知，$\angle MOP_3=45°$，因为 $OP_3=1$，所以 $OM=P_3M=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；又 $OP_4=3$，所以 $OQ=QP_4=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，再由对称性得，$P$ 点的横坐标的取值范围为 $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqslant x_p\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x_p\leqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.这一问用的是定义的"性质定理"性.

(2)因为 $y=-x+1$ 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A、B 两点，所以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，如图 3，三个同心圆 C，中圆的半径是 2，小圆的半径是 1，大圆的半径是 3，当线段 AB 落在圆环内部（含边界）（阴影部分）时，线段 AB 上的点都是$\odot C$ 的关联点.

下面要通过运动变化中定临界位置，求变量的取值范围.

为此，让三个同心圆 C 运动变化（提示：同学们解决问题时，运动变化是想像，由于圆和线段是相对运动，可运动线段 AB 观察和确定临界位置），当线段 AB 在阴影里时，观察有四个临界位置.

如图 4，当大圆 C 过点 A 时，此时 $CA=3$，所以 C 点坐标为$(-2,0)$；

如图 5，当 AB 与小圆 C 相切时，切点为 D，所以 $CD=1$，又直线 AB 所在的函数解析式为 $y=-x+1$，所以直线 AB 与 x 轴形成的夹角是 $45°$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$CA=\sqrt{2}$，所以 C 点坐标为$(1-\sqrt{2},0)$.

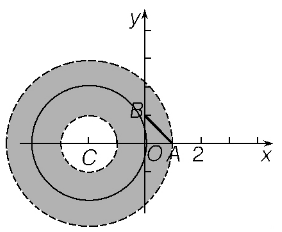

图 4

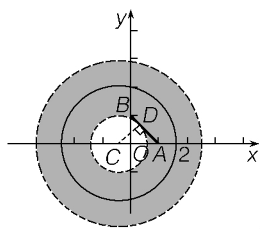

图 5

所以 C 点的横坐标的取值范围为 $-2\leqslant x_C\leqslant 1-\sqrt{2}$；

如图 6，当小圆 C 过点 A 时，$AC=1$，C 点坐标为$(2,0)$.

如图 7，当大圆 C 过点 B 时，连接 BC，此时 $BC=3$，

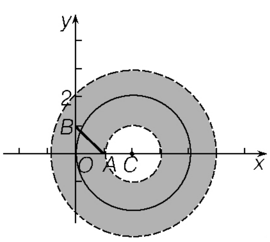

图 6

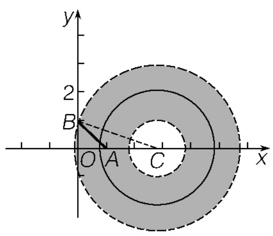

图 7

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCB$ 中，由勾股定理得 $OC=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$，$C$ 点坐标为$(2\sqrt{2},0)$.

所以 C 点的横坐标的取值范围为 $2\leqslant x_C\leqslant 2\sqrt{2}$.

综上所述 C 点的横坐标的取值范围为 $-2\leqslant x_C\leqslant 1-\sqrt{2}$ 或 $2\leqslant x_C\leqslant 2\sqrt{2}$.

这一问也用的是定义的“性质定理”性.

这是一道综合题，解决好这个问题，需要从“两向性”上理解新定义，当然想清楚关联点组成的区域、用运动变化的思想理清临界位置也是至关重要的.

通过以上三个方面（几何、代数、新定义）你对通过识“两向性”学好数学概念是否有了一些感悟呢.

参考文献

[1] 陆剑鸣，怎样学好数学概念——看“结构”. 中学生数学，2018，3（下）

（责审　韩乐琴）

智慧窗《巧算原有苹果数》参考答案

设原有苹果数为 n 个，依据题意：当 $n=1=2^1-1$ 时，可供一位顾客购买；当 $n=2=1\times 2+1=2^2-1$，可供第二位顾客购买；当 $n=3=3\times 2+1=7=2^3-1$，可供第三位顾客购买.类推，当 $n=2^8-1=255$ 时，可供第 8 位顾客购买.

具体过程如下表：

原有 255 粒苹果贩卖过程表

顾客购买苹果数		剩下的苹果总数
顺序	数量	
第一位	$255\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=128$	127
第二位	$127\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=64$	63
第三位	$63\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=32$	31
第四位	$31\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=16$	15
第五位	$15\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8$	7
第六位	$7\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$	3
第七位	$3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$	1
第八位	$1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	0