数学活动：神奇的莫比乌斯带

叶正清

（北京市第八中学 初二(12)班，100038）

指导教师　安冬梅

1 研究背景

同学们，你是否知道莫比乌斯带？是否也对它充满了好奇？为此，我深入探究了一下.

2 研究目的

验证莫比乌斯带的“单侧”性质：不翻越纸带的面一次能走完整个纸条；以不同方式剪开纸带，剪完后纸带哪些仍还保留单侧性质.

3 研究方法

(1)实验(试验有几种剪开情况，以及是否具有单侧性质)

(2)统计(统计实验结果，分类讨论)

4 工具

纸条，彩笔，胶棒，剪刀

5 研究过程

(1)证明单侧性质

①制作一个莫比乌斯带

②实验

首先，我们将纸带标记成 A、B 两面. 在纸片没被翻折时，如图 1 所示，A、B 两面没有任何关系.

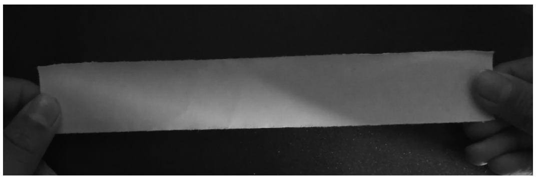

图 1

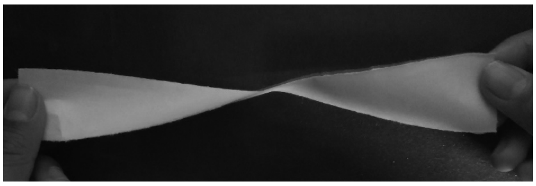

图 2

而在翻折后，如图 2 所示，我们把纸带旋转 $180°$ 后将两端对接在一处. 在这段纸带上，A 面翻转到了 B 面，B 面翻转到了 A 面，A、B 两面在这里可以自由交换，为了方便思考，我们把这段纸带看作一个点，称作扭点.

假设我们从这个点出发，先走完了纸带的 A 面，然后回到这个点后，又从 A 面翻转到了 B 面. 继续走下去，我们便走完了整条纸带，而没有翻越任何的面.

③实验结果

具有单侧性质.

(2)几种剪开纸带的方式，且剪开纸带后是否保留单侧性质

我们考虑了两种剪开纸带的方式：在宽度的 $\frac{1}{2}$ 处和 $\frac{1}{3}$ 处.

①实验、统计

$\frac{1}{2}$ 处→大环；$\frac{1}{3}$ 处→大小套环

在 $\frac{1}{2}$ 处剪开后，在新的环形纸带上的宽度 $\frac{1}{2}$ 处再剪一次→大环套大环

$\frac{1}{2}$ 处→大环不具备；$\frac{1}{3}$ 处→大圆环不具备，小圆环具备

在 $\frac{1}{2}$ 处剪开后，在新的环形纸带上的宽度

$\frac{1}{2}$处再剪一次→两个大环都不具备

(3)为什么纸带剪开后会出现这两种情况？且为何剪开后有的具备单侧性质，有的不具备？

①经试验、推断，运用对比法、画线法和还原法，得出以下结果：

1)沿$\frac{1}{2}$处剪开纸带，得到大圆环，是因为环中间有个扭点，如图3所示：

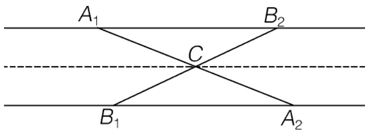

图3

这个图是$\frac{1}{2}$沿处剪到差一点剪断.虚线代表剪开的轨迹，实线代表纸带，A、B代表两个不同的圆环.

将交点C剪断后，可能大家认为纸带会一分为二，其实不然.由于B_1与B_2、A_1与A_2仍是一个圆(连接着)，所以会成为一个大圆环.简而言之，就是B_1连A_2，A_2连A_1，A_1连B_2，B_2连B_1，这样就构成了一个循环，也就是圆.

为什么剪开后的圆环，就不具有单侧性质了呢？这是因为：在剪开后，原本的$180°$扭点被剪开(复制)了一个，也就是说，扭转的不是$180°$，而是$360°$.转$360°$也就是纸带转了个圈，反面仍是反面，正面仍是正面.这样就失去了正反面可以自由交换的性质(单侧性质).

2)沿$\frac{1}{3}$处剪开(不论内外)，为什么都会得到大圆环连小圆环呢？其实，沿$\frac{1}{3}$处剪到同一个地方都剩一点，你会发现如图4所示：

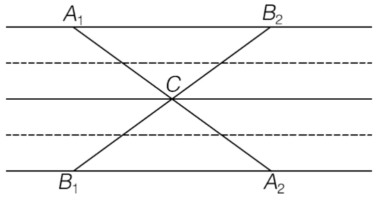

图4

(高度：$B>C>A$)

三条线是均分的，这下知道为什么是$\frac{1}{3}$了吧！大圆环就是A、B两个圆环，周长比C大一倍，而小圆环就是C.至于为什么连上，是因为在A_2连A_1和B_2连B_1的纸带套住了C，所以自然就连上了.

为什么小圆环具备单侧性质大圆环不具备呢？很简单.大圆环跟①的道理一样.而小圆环从始至终都没有被剪到过，当然还维持单侧性质啦！

6 结论

(1)莫比乌斯带具有单侧性质；

(2)不同的剪开方式，会出现不同的结果，结果可以分为两类：大环或大环相套、相套的纸带中有一个小环；

(3)剪开的纸带，大环都不具备单侧性质，如果有小环，小环具备单侧性质.

7 体会

此次对莫比乌斯带的探究，我感受颇深.因为在论证过程中，我查询了很多资料，学习到很多知识.而令我感触最深的是，此次论证的答案并不是从资料中获取的，而是通过自己动手，实践操作获得的.每一步的准备、操作、分析和总结，都需要自己动手完成，这种"烧脑"的感觉太挑战了，是难得的体验.由此更让我明白了，做学问，探究新领域，需要有锲而不舍的态度和认真实干的精神.勇于探索，勇于创新，才能有所收获.

教师说明　初一阶段学生的思维活动，既

有具体形象的方面，又有模糊抽象的方面，思维仍属于经验型.很多学生都听说过莫比乌斯带，我们设计了一系列数学实践活动，通过观察实验，感受莫比乌斯带魔术般的神奇变化.通过思考操作发现并验证“莫比乌斯带”的特征，引导学生的思维从形象到抽象，不断向高水平转化.主要有以下几个活动：

活动一、了解莫比乌斯带

把一根纸条扭转 180°后，两头再粘接起来做成的纸带圈，具有魔术般的性质.普通纸带具有两个面（即双侧曲面），一个正面，一个反面，两个面可以涂成不同的颜色；而这样的纸带只有一个面（即单侧曲面），一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘.这种纸带被称为“莫比乌斯带”.

活动二、探究莫比乌斯带魔术般的性质


用剪刀沿纸带的中央把它剪开.普通纸带会被一分为二，不进行操作，也很容易想象，而莫比乌斯带不仅没有一分为二，反而剪出一个两倍长的纸圈，有些超乎想象.再引导学生进一步思考，新的纸圈是否仍然是“单面”……

活动三、探究莫比乌斯带还有哪些性质

a）设计裁剪方式，b）猜想，c）操作验证，d）探索原因；

1.沿三分之一剪开

2.沿四分之一剪开

……

活动四、变形莫比乌斯带及性质：如两个莫比乌斯带垂直粘贴，把一个莫比乌斯带用纸带连通……

a）设计裁剪方式，b）猜想，c）操作验证，d）探索原因；

1.反转 360°，沿中央剪开

2.反转 360°，沿三分之一剪开

因为莫比乌斯带空间结构的复杂性，各部分位置关系难以刻画，对于学生来说实践操作可能相对简单，要对所得的结果进行论证则是是一种挑战.学生进行裁剪验证自己的猜想时会发现结果总是超乎自己想象，体会到莫比乌斯带的神奇之处，进而想要了解其原因.叶正清同学选取了一个角度，尝试进行了研究，不仅研究出一些小成果，而且还很享受这种“烧脑”的探索过程，实在难能可贵.其实不管是否有研究成果，只要大胆去尝试，都会有自己的收获.

（责审　赵学志）

智慧窗《巧求值》参考答案

解　令 $2019+\sqrt{2019^2+1}=n$，

则 $m+\sqrt{m^2+1}=\dfrac{1}{n}$.

由 $2019+\sqrt{2019^2+1}=n$，得

$\sqrt{2019^2+1}=n-2019$.　①

由 $m+\sqrt{m^2+1}=\dfrac{1}{n}$，得

$\sqrt{m^2+1}=\dfrac{1}{n}-m$.　②

①，②分别平方，得

$2019^2+1=n^2-2\times2019n+2019^2$.

$m^2+1=\dfrac{1}{n^2}-2\dfrac{m}{n}+m^2$.

由此得 $n-2\times2019=n+2m$.

故 $m=-2019$.