写给逻辑推理的情书

江北辰
（深圳市百合外国语学校1608班，广东 深圳 518000）

1 奥妙的“背后数字”问题

最近有同学问我一道逻辑推理题：一个主持人在甲、乙、丙三个人背后各贴上一个正整数，其中一个数等于另外两个数之和.他们每个人都能看到别人背后的数，但看不到自己背后的数，三人不能相互交流.这三个人都非常善于推理，而且不会撒谎.现在主持人按甲、乙、丙的顺序轮流问他们是否知道自己背后的数.第一轮，甲、乙、丙依次回答不知道；第二轮，甲、乙先后回答不知道，丙回答他背后的数是144.请问甲、乙背后的数各是多少？

我花了三天把“背后数字”问题彻底搞懂，然后对同学说出了答案，他目瞪口呆.

2 “白帽子”问题与数学递推法

在解决“背后数字”之前，我想先谈一谈我在逻辑推理方面受到的启蒙.启蒙我的是一个简单而有趣的问题：有十几个人去参加聚会，主持人在他们每个人头上戴上一顶帽子，每顶帽子要么是白色，要么是黑色，并且至少有一顶白帽子.参加聚会的每一个人都可以看见别人头上帽子的颜色，但是不能看见自己头上帽子的颜色.他们每个人都非常善于推理，但是他们之间不能交流.如果有人知道自己戴着白帽子，就在主持人关灯的时候鼓一下掌.第一次关灯时鸦雀无声，第二次关灯也是如此，直到第三次关灯才响起掌声.请问有多少人戴着白帽子？

这个“白帽子”问题看似无法下手，但我们知道数学上有一个很重要的解题方法——“数学递推法”.我们不妨从最简单的情形——只有一顶白帽子——展开推理.

第一步　假设只有一顶白帽子.戴白帽子的人（设为A）发现自己周围的人全部戴着黑帽子，他就会推导自己戴着白帽子，所以他在第一次关灯时就应该鼓掌.由此我们推断：如果第一次关灯没有人鼓掌，就说明戴白帽子的人数大于1.

第二步　假设有两顶白帽子.这时A发现了另一个戴白帽子的人（设为B），A在第一次关灯时不能确定自己是否戴着白帽子，所以不会鼓掌，B也是如此.从第一步结论可知戴白帽子的人数大于1.在A的视野里只有B是戴着白帽子的，这时A可以推导自己是戴着白帽子的；同理，B也会推导自己戴着白帽子.因此当只有两顶白帽子时，A和B都会在第二次关灯时鼓掌.由此我们推断：如果第二次关灯没有人鼓掌，就说明戴白帽子的人数大于2.

第三步　假设有三顶白帽子.这时，A和B发现了另一个戴白帽子的人（设为C），C也会看见A和B戴着白帽子，A、B、C三个人在第一次关灯时都无法确定自己是否戴着白帽子，所以都不会鼓掌.这时，根据第一步的结论推断出至少有两个人戴着白帽子.再次开灯，在A看来，可能只有B、C两个人戴着白帽子，因此他在第二次关灯时不会鼓掌；同理，B和C在第二次关灯时也不会鼓掌.这时，根据第二步的结论推断出戴白帽子的人数大于2.第三次开灯，因为在A的视野里只有B和C是戴着白帽子的，所以A这时明白自己是戴着白帽子的；同理，B、C这时也会明白自己戴

着白帽子.因此当有三个人戴着白帽子时,在第三次关灯时就会响起掌声.

至此,采用数学递推法,我们发现这样一个规律:有几个人戴着白帽子,就会在第几次关灯时响起掌声.同时,我们发现数学递推法是一种非常有用的逻辑推理方法:从最简单的情形开始分析,一步一步地把情形复杂化,在这个过程中提炼出一般性结论,最后得到符合题意的答案.

3 “背后数字”问题的逻辑推理

现在,让我们回到最初的“背后数字”问题.我们还是从最简单的情形——$1+1=2$(甲是1,乙是1,丙是2)入手.丙看见甲和乙背后是1,从“正整数”的前提条件可知,丙不会是0,就会明白自己是2.因此在第一轮末尾丙就会推导自己是2,即表1中记录的情形1.

然后进一步讨论$1+2=3$(甲是1,乙是2,丙是3)的情形.丙看到甲和乙背后分别是1和2,他不知道自己是1还是3,所以我们要退一步,先看一看丙是$1=2-1$(甲是1,乙是2,丙是1)的情形.若乙看见甲和丙是1,就会推导自己是2,即表1中记录的情形2,乙在第一轮就会推导自己是2.

我们再回到丙是$3(1+2=3)$的情形.丙开始不知道自己是1还是3,但是他可以通过观察甲和乙的反应来推断自己的数.甲看到2和3,自己是1还是5呢?不得而知;乙看到1和3,不知道自己是2或4,也无法从甲的反应来舍弃其中一种情形;丙看到1和2,不知道自己是1还是3,但是乙在第一轮没有给出答案,所以丙推导自己不是1,只能是3.因此丙是在第一轮末尾知道自己是3,即表1中记录的情形3.

到目前为止,似乎都是数字最大的人最先知道自己是多少.为了验证这个结论,现在我们继续讨论$1+3=4$(甲是1,乙是3,丙是4)的情形.丙要想确认自己是4,就要推翻自己背后数字是2的情形.所以我们要退一步,先看一看$1=3-2$(甲是1,乙是3,丙是2)的情形.这时,乙会在1或者是3之间徘徊.那么乙要先驳倒自己是1的假设,才能推导自己是3.如果自己是1,那么丙在第一轮末尾就应该得出自己是2的结论,实际上丙看到1和3,他不能确定自己是2还是4,所以乙就能在第二轮根据丙在第一轮的反应推导自己不是1,而是3,即表1中记录的情形4.

让我们再回到$1+3=4$的情形.这时乙看到的数字是1和4,他想要知道自己是3还是5,需要去推翻一个与事实不符的结论.然而要推翻这个结论,又必先分析这个情形在什么时候成立.当乙思考不决的时候,丙根据乙在第二轮的反应,驳倒自己是2的结论,从而在第二轮末尾推断自己是4,这种情形我们在表1中记录为情形5.

总结一下,之所以总是背后数字最大的人最先推导自己是多少,是因为数字较小的人要明白自己是多少,必先推翻两个相违背的结论中的一个,而不论是哪一个结论所在的情形,其复杂程度都大于数字最大者所处情形的复杂程度,所以数字较小者难以判定背后的数字,而数字最大者可以依据其他人的反应最先驳倒错误的结论,从而最先推导出自己背后的数字.

表1 不同情形结果记录

情形	甲	乙	丙	谁在第几轮知道自己背后的数	
情形1	1	1	2	丙	第一轮
情形2	1	2	1	乙	第一轮
情形3	1	2	3	丙	第一轮
情形4	1	3	2	乙	第二轮
情形5	1	3	4	丙	第二轮

进一步,如果所有人背后的数再乘以n(n是正整数),上述推理得出的结论(谁在第几轮

知道自己背后的数)依然成立.

以 $1+1=2$ 为例,我们可以把情形变为 $n+n=2n$(甲是 n,乙是 n,丙是 $2n$):丙看见甲是 n,乙是 n,又因为自己是正整数,所以在第一轮就推导自己是 $2n$,即表 2 中的情形 1.以此类推,我们可以得到表 2 中的其他情形.

表 2 "数字乘以 n"不同情形结果记录

情形	甲	乙	丙	谁在第几轮知道自己背后的数	
情形 1	n	n	$2n$	丙	第一轮
情形 2	n	$2n$	n	乙	第一轮
情形 3	n	$2n$	$3n$	丙	第一轮
情形 4	n	$3n$	$2n$	乙	第二轮
情形 5	n	$3n$	$4n$	丙	第二轮

然后根据题意(丙在第二轮末尾知道自己背后的数),对照表 2 的情形 5,我们可以得出:甲是 36,乙是 108,丙是 144 的情形符合题意.

4 "背后数字"问题的进一步推演

问题探索到这里,只解决了一半.因为到目前为止,我们所讨论的都是最大数是最小数的整数倍的情形,我们还没有讨论最大数和最小数之间不存在倍数关系的情形,比如 $2+3=5$(甲是 2,乙是 3,丙是 5).

以 $2+3=5$ 的情形为例,从刚才得出的结论可知:丙应该是最先知道自己是 5 的人.而丙要得到这个结论,需要先驳倒自己是 1 的情形.所以我们要退一步,先看一看 $2=3-1$(甲是 2,乙是 3,丙是 1)的情形.这时,乙会思考自己是 1 还是 3,如果是 1,那么甲在第一轮就能推导出自己是 2,即表 3 中记录的情形 3.由于甲在第一轮并未得出结论,所以乙可以根据甲的反应,在第一轮推导自己是 3,即表 3 中记录的情形 2.

让我们再回到 $2+3=5$ 的情形.由于乙在第一轮不能推导自己是 3,那么 $2=3-1$ 的情形就被驳倒,这时丙可以根据乙的反应,在第一轮末尾推导自己是 5,即表 3 中记录的情形 1.

表 3 $2+3=5$ 的推理过程

情形	甲	乙	丙	谁在第几轮知道自己背后的数	
情形 1	2	3	5	丙	第一轮
情形 2	2	3	1	乙	第一轮
情形 3	2	1	1	甲	第一轮

回到原题,由于丙是最先知道自己是 144 的,所以 144 应是三人背后数中最大的,并且是甲、乙背后数之和.我们用枚举法检验所有两数之和为 144 的情形:$1+143=144$、$2+142=144$、$3+141=144$……$143+1=144$.然后再从这 143 种情形中,用上面的方法进行推理,找出丙能够在第二轮推导出自己是 144 的情形.

目前题目已经解决了,符合题目要求的有且只有五种情形:$32+112=144$、$36+108=144$、$54+90=144$、$64+80=144$、$108+36=144$.读者们如果不信,可以自己去验算一下,我个人是建议用表格来验算,因为表格更加具体、直观.至于我的同学为什么会目瞪口呆——因为他只算出了 $36+108=144$ 这一种解.

(责审 李大永)

(上接第 41 页)

(3) $\log_3 2+\log_3 6-\log_3 4=\log_3 \frac{2\times 6}{4}=\log_3 3=1$.

本题通过阅读材料,用到学过的知识去解决新问题,培养了学生的阅读能力,以及用学过的知识去解决新问题的科学精神,同时锻炼学生的实践创新能力.

通过以上四例,可以看出有些中考试题中蕴含的核心素养不止一个方面,从数学学科的核心素养看,初中的数学核心素养体现在十大核心概念,即几何直观、空间观念、模型思想、运算能力、数据分析观念、数感、符号意识、推理能力、应用意识和创新意识等,都在目前的中考中逐渐得以体现. (责审 曹付生)