音乐中的数学因子——黄金分割点

湖南师大附中高1211班(410006) 瞿 佳
湖南师大附中高1215班(410006) 吕 瑛
湖南师大附中数学教研组(410006) 张湘君

1. 问题提出

千百年来,研究音乐和数学的关系一直是个热门的课题.从古希腊毕达哥拉斯发现声音的质的差别(如长短、高低、轻重等)都是由发声体数量方面的差别决定的开始,到现代使用数学公式作曲,数学和音乐一直密切相关、相辅相成.数学因为音乐而更加浪漫,音乐因为数学而更加有旋律感,而擅长音乐的数学家很少见,擅长数学的音乐家更为少见.

数学中的黄金分割点一直以她神秘的美而著称,而一些经典乐曲也以它的黄金比例而被世人所倾听.这吸引了我们对二者的兴趣,故决定探讨二者关系,并从中得出前者对于后者的影响,来使后者更加完善.

2. 初步分析

经过一定研究,我们发现许多乐曲或是歌曲,都存在一定的黄金分割,譬如:若是一个乐曲有128个小节,那么128*0.382或是128*0.618为乐曲的最适第一、第二高潮点.有些曲目偏离黄金分割,对比其与符合黄金分割的曲目的流行程度,是否会发现黄金分割对于乐曲的流行程度产生的影响?从一定意义上说,带有黄金分割的曲子更加富有旋律性,让人耳熟能详.如果在一个不符合黄金分割的乐曲上,能加以改善,使其接近黄金分割比例,是否能改善乐曲的质量?

3. 数据分析

我们在"百度经典流行歌曲大全"中随机筛选了20首歌曲,分别为《得意的笑》、《云中有朵雨做的云》、《今天》、《卡门序曲》、《卡农》、《两两相望》、《龙的传人》、《小草》、《过火》、《祈祷》、《精忠报国》、《大海》、《丁香花》、《橄榄树》、《后来》、《降D大调奏鸣曲》、《赋格乐章第一乐章》、《明月几时有》、《莫斯科郊外的晚上》、《女人花》.

数据分析列表如下:

歌曲名称	总小节数	第一高潮小节数	第二高潮小节数	第三高潮小节数
得意的笑	121	27	52	
云中有朵雨做的云	99	14	38	88
今天	88	29	55	
卡门序曲	147	14	103	
卡农	89	27	45	67
两两相望	134	45	91	
龙的传人	119	29	59	84
小草	94	37	59	78
过火	174	65	109	158
祈祷	104	48		
精忠报国	93	36	68	
大海	129	13	66	81
丁香花	182	26	72	117
橄榄树	121	33	94	
后来	183	54	120	
降D大调奏鸣曲	76	46		
赋格乐章第一乐章	84	22		
明月几时有	82	62		
莫斯科郊外的晚上	81	11	27	76
女人花	143	38	54	

根据上述20个曲目的数据分析,我们将曲目依次记为$q1$、$q2$、$q3$、$q4$、$q5$、$q6$、$q7$、$q8$、$q9$、$q10$、$q11$、$q12$、$q13$、$q14$、$q15$、$q16$、$q17$、$q18$、$q19$、$q20$.乐曲总小节数为Y,将一、二、三高潮小节

数 X 分别设为 $X1$、$X2$、$X3$. 若 $X1$、$X2$、$X3$ 中有任意一个 X 符合 $X(1/2/3)=Y*(0.618\pm0.5)$ 或 $X(1/2/3)=Y*(0.382\pm0.5)$ 时,我们视该曲目为"黄金分割曲目($A=1$)",其余曲目视为"非黄金分割曲目($A=0$)".

经统计:

"黄金分割曲目"有:$q1$、$q2$、$q3$、$q5$、$q7$、$q9$、$q10$、$q11$、$q12$、$q13$、$q15$、$q16$、$q19$、$q20$.

"非黄金分割曲目"有:$q4$、$q6$、$q8$、$q14$、$q17$、$q18$.

分布列表格如下:

A	1	0
P	0.7	0.3

根据以上表格,我们可以知道,"黄金分割曲目"和"非黄金分割曲目"各自所占分布列,并提出"黄金分割曲目"数量大于"非黄金分割曲目"数量的观点.

同时,我们也对歌曲的创作时间进行调查,发现出版时间晚的歌大多比出版时间早的歌更加符合黄金比例. 在现代乐坛中,这确实是个可喜的变化.

根据上述20个曲目的QQ音乐收听量,我们可对歌曲的流行程度做出评估,数据如下:

歌曲名称	QQ音乐收听量
得意的笑	696748
云中有朵雨做的云	12574175
今天	7839869
卡门序曲	4212
卡农	6428319
两两相望	668464
龙的传人	1283280
小草	191597
过火	31773770
祈祷	4993031
精忠报国	2678111
大海	11175200
丁香花	1663869

歌曲名称	QQ音乐收听量
橄榄树	90016
后来	21367863
降D大调奏鸣曲	3782
赋格乐章第一乐章	2420
明月几时有	303471
莫斯科郊外的晚上	902447
女人花	6159002

其中,我们发现基本符合黄金分割比例的曲目比不符合黄金分割比例的曲目更加流行,寻其原因,大概是因为前者的曲风和旋律更加能让人得到享受,由此可见,黄金分割在乐曲中的重要性.

4. 模型应用

随着加勒比海盗电影的热播,加勒比海盗主题曲也深受影迷喜爱. 加勒比海盗主题曲将紧张壮阔的激烈打斗场面用音符体现出来. 但也有不少影迷反映,这首曲子的引子部分过长,虽然贴合电影情节发展,但作为单独曲目演奏时,情感爆发的地方太靠后. 于是,我们萌发了运用黄金分割比例的原理改编曲子的想法.

我们将部分小节删去,保留经典段子,使引子部分精练,有特色,高潮部分适当加长,情感表现更加淋漓精致,结尾处删去部分重复乐段,显得简单,而悲伤气氛更浓烈.

改编乐曲后,我们组织校民乐团将乐曲重演了一遍,感觉效果更佳(演奏视频如果感兴趣可以电邮作者).

	总小节数(Y)	第一高潮小节($X1$)	第二高潮小节($X2$)	第三高潮小节($X3$)
原配乐曲	184	56	120	152
改编乐曲	136	52	80	104

根据我们的模型,我们可以计算出原配乐曲和改编乐曲的黄金比例程度. 设原配乐曲和改编乐曲的总小节数分别为 $Y1$、$Y2$,第一、第二、第三高潮小节数分别为 $X1-1$、$X1-2$、$X1-3$ 和 $X2-1$、$X2-2$、$X3-3$. (下转封三)

$\because\ |\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\geqslant|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|$,所以

$$\sqrt{b+c+a}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}\geqslant\sqrt{b}\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\frac{b}{\sqrt{c}}+\sqrt{a}\frac{c}{\sqrt{a}}=a+b+c=1.$$

$\therefore$ 有

$$\sqrt{1}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}\geqslant1\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant1.$$

当$\overrightarrow{OA}/\!/\overrightarrow{OB}$时,“=”成立.例3、例4是巧妙地构造了向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$,充分利用$|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\geqslant|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|$的性质来求解.以上的四个例题求解过程体现了$|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\geqslant|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|$的强大威力.希望同学们在学习的过程中多思考,多总结必有收获.

(责审 余炯沛)

(上接第47页)

可以得出(结果保留三位小数):

$X1-1\approx0.304*Y1$;

$X1-2\approx0.652*Y1$;

$X1-3\approx0.826*Y1$.

$X2-1\approx0.382*Y2$;

$X2-2\approx0.588*Y2$;

$X2-3\approx0.765*Y2$.

根据以上数据,我们发现改编乐曲的黄金比例程度在原配歌曲的基础上得到了很大的提升,对比二者,我们也发现后者更为紧凑、动听.

5.个人体会

世界上每种不同的知识之间,都是有关系的.万物本源于一物,我们常认为毫无关系的事物,其实大多是相互作用、相互影响的.类似数学中的黄金分割点和乐曲的关系,事实上还有很多,只要我们善于发现善于运用,必然会有大的发现.我们不断探索这个世界,这个世界上的事物就会不断地显得明白.

参考文献

[1] 何镕.数学、计算机与音乐[J].自然杂志,2002,24(3):181-184

[2] 刘卫锋,王尚志.数学与音乐[J].数学通报,2005,44(4):19-21,18

[3] 徐群飞.对“黄金分割的研究性学习”[J].数学通报,2006,45(4):40-42

[4] 叶军.对黄金分割与Fibonacci数列[J].数学通报,2004,43(10):28-30,25

[5] 苑繁宝.数学与音乐之约[J].新课程(教研版),2012,(8):116-117

(责审 张思明)

(上接封底)

由于$0<x\leqslant1<e^{2x}\leqslant e^2$(等号当仅当$x=1$时成立),

有$\begin{cases}\dfrac{e^{2x}}{x}>1,\\2x-1\leqslant1,\end{cases}$ 得 $-\dfrac{e^{2x}}{x}+2x-1<0$,

$\therefore\ d'(x)=e^{-2x}(-\dfrac{e^{2x}}{x}+2x-1)<0.$

则$d(x)$在$(0,1]$递减,有$d(x)_{\min}=d(1)=0$.

$\therefore\ Y-y=d(x)\geqslant f(x)_{\min}=0$(等号当仅当$x=1$时成立),得$Y\geqslant y$.

即$x\in(0,1)$时,曲线G在F上方,且仅有一交点$N(1,0)$.

这样问题就大白了.

当$c<-\dfrac{1}{e^2}$时,曲线F下移,F与G无交点,方程无根;

当$c=-\dfrac{1}{e^2}$时,曲线F与G交于一点$N(1,0)$,方程有一根;

当$c>-\dfrac{1}{e^2}$时,曲线F上移,F与G有两交点,方程有二根.

(责审 余炯沛)