平分火腿三明治

北京师范大学数学系(100875)　王敬庚

用两片不同颜色的面包,中间夹一片火腿,做成一个火腿三明治.问只切一刀就将这个三明治的三层同时分成等体积的两半,这个切法一定存在吗?

我们先来看平面上的一个简单情形.

对于平面上的一个任意形状的封闭图形,用一条直线将它平分为面积相等的两半,这样的直线一定存在吗?若存在,有多少条?

特殊地,如果这个图形是圆,那么很容易得到,通过圆心的任意一条直线,都将该圆平分为等积的两半(两部分不仅面积相等,而且形状也全等).其实不仅是圆,只要是中心对称图形(例如正方形,平行四边形等)也都是这样.通过对称中心的每一条直线都符合要求,这样的直线有无穷多条.

对于非中心对称的图形,情形如何呢?

为了解决这个问题,我们先介绍函数连续性的概念.一个函数是连续的,直观地说,就是只要给自变量一个足够微小的改变,就可以使函数值的改变任意地小,或者说该函数的图象是一条连在一起的中间任何地方也不断开的曲线.下面我们要用到由连续性概念得到的一个重要结论:若函数在闭区间上是连续的,即当自变量连续变化时,函数值也连续变化,因此,当函数值从 y_1 变到 y_2 时,必经过 y_1 与 y_2 之间的一切值.一个特别有用且经常使用的结论是,若一个连续函数的值从负变到正(或从正变到负),则它必有一点的函数值为零.

取一条指定了正向的直线为基线(x 轴).任意给定一个方向,设它的指向与 x 轴正向的夹角为 θ(见图1).一条具有给定方向 θ 的动直线(称它的方向角为 θ)平行移动时(见图1),必在其中某一位置将图形平分.证明如下:当该直线连续地平行移动时,被该直线割出的图形在该直线左侧部分(观察者面向给定方向)的面积,设为 S_1,也是连续变化的;同样,图形在该直线右侧的面积,设为 S_2,也是连续变化的;因而左右两侧面积之差 S_1-S_2 也是连续变化的.如果动直线自左而右连续地平行移动,那么图形被它分割成的左右两部分面积之差 S_1-S_2 就由开始时的小于零连续地变化成后来的大于零.根据连续性,我们得到该平行移动的直线必有一个位置,使 $S_1-S_2=0$,即处于该位置的方向角为 θ 的直线平分该图形为等积的两部分.

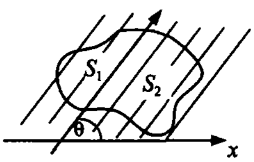

图1

由于平面上有无穷多个不同的方向,而指定一个方向,就有一条平行于该方向的直线平分这个图形,因此平分该图形的直线有无穷多条.

进一步我们再来考察,对于平面上的两个任意形状的封闭图形 A 和 B,是否一定存在一条直线能同时将图形 A 和图形 B 都分成等积的两半?

由前面的讨论,我们已经知道,对于图形 A,有无穷多条直线平分它为等积的两部分.现在我们来证明,在平分图形 A 的这无穷多条直线中,必有一条同时也平分图形 B.

记方向角为 θ 的平分图形 A 的直线为 $l(\theta)$.设 $l(\theta)$ 分图形 B 为两部分:记在 $l(\theta)$ 左侧部分(观察者面向 $l(\theta)$ 正向)的图形面积为 S_1,在 $l(\theta)$ 右侧部分的图形面积为 S_2(见图2).当方向角 θ 连续变化时,直线 $l(\theta)$ 的位置也连续变化,因此 S_1 和 S_2,因而 S_1-S_2 也连续变化.当 θ 连续地变成 $\theta+\pi$ 时,$l(\theta)$ 连续地变成 $l(\theta+\pi)$,$l(\theta+\pi)$ 与 $l(\theta)$ 是同一条直线,但方向正好相反.因此 $l(\theta+\pi)$ 分图形 B 所得左侧部分正好是 $l(\theta)$ 分图形 B 所得右侧部分,即 $S_1'=S_2$,同样,$S_2'=S_1$(见图2).于是 ▷

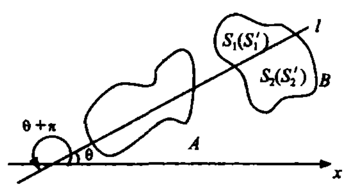

图2

“牛顿栽树问题”的思路分析

江苏省南通新世纪学校(226011)　陆海泉

蜚声全球的力学家、数学家牛顿(1642－1727)曾以诗歌形式提出了一个数学问题：

要栽九棵树，请你来帮忙，

每行栽三棵，恰好成十行.

这就是著名的牛顿栽树问题.(编者注：本刊2000年8(上)期《智慧窗》曾用此题)要解决这一问题，颇有难度，因为，按题中要求，似乎需要30棵树才行.常规思路不通，怎么办？让我们先降低要求，看一看较为简单的情况：

9棵树栽成8行，每行3棵，怎样栽法？

分析　很自然地画图试试，每行3棵，先画3行，已经9棵(如图1)，树不能增加了，行数能否增加呢？联想正方形的性质，易知，将9棵树栽在正方形的四个顶点、四边中点及中心9个位置，便成8行，且每行3棵.

再进一步试验：9棵树栽成9行，每行3棵，怎样栽法？

试想，能不能利用图1作些调整，即移动1棵或几棵树的位置后，增加1行呢？移来移去，不达目的.此时，应立即摆脱图1的束缚，另辟蹊径.

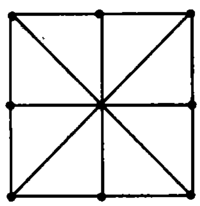

图1

分析　因为每行3棵，我们还可以联想到正三角形，并画出它的三条中线(如图2)先在A、B、C、D、E、F、O处栽下7棵树，已成6行.剩下的两棵树在哪里，才能再增加3行？延长BF、CD交过A点的一直线于G、H，不行！因为不能4棵一行.延长ED、EF交过A点上一直线于G、H，在G、H处栽两棵树，恰好增加3行，共9行，每行3棵，符合要求.

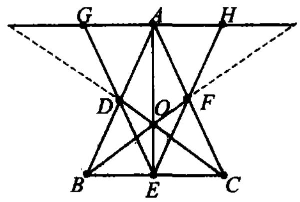

图2

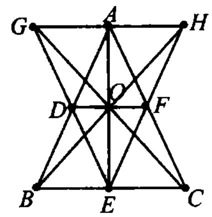

图3

在以上研究的基础上，我们就能比较顺利地解决原问题了.

分析　无疑，我们应该抓住图2思考，因为图2中距原题要求只差一行.9棵树中，先调整哪一棵的位置？仔细观察，发现图中D、O、F三点不共线，如果这三点共线，不就又增加1行吗？将O点上移至AE中点位置，画出图3，数一数，9棵10行，每行3棵.啊，成功了！

兴奋之余，请同学们回过头来反思三个问题：

(1) 解题的思路是如何形成的？

(2) 由简到繁、由易到难的转换策略是如何具体运用的？

(3) 若图1中不画成正三角形，那么，还可以画成什么图形？

(4) 解决这个栽树问题有无其它方法？告诉你，“牛顿栽树问题”的答案有好多种，你一定会想出更为绝妙的栽法.　□

(责审　张　芃)

▷　$S_1'-S_2'=S_2-S_1=-(S_1-S_2)$，

即左右两侧面积之差改变符号(由负变成正或由正变成负).因此必有一个$\theta_0(\theta\leqslant\theta_0\leqslant\theta+\pi)$，使直线$l(\theta_0)$分图形$B$所得左右两部分面积相等，这条直线必同时平分图形$A$和图形$B$.

把上述平面上的情形推广到空间，由完全类似的分析我们可以得到，对于空间任意三个立体，必有一个平面同时把它们都平分成等体积的两部分.应用这个结果，我们就可以得到，只切一刀就可以把做成火腿三明治的两种不同颜色的面包片和中间夹的火腿片同时都平分成等体积的两半，这个结论虽然没有告诉我们具体怎样去切，但它断言这个切法是一定存在的.

应用上述结果，我们还可得到如下有趣的结论：一个煮熟的双黄咸鸭蛋，一定可以只切一刀，就将蛋白和两个蛋黄同时都切成等体积的两半.　□

(责审　张　芃)