

环面 趣谈

北京师范大学数学科学学院(100875) 王敬庚

日常生活中我们最常见的封闭曲面,除了球面以外,就要数轮胎面了.轮胎面在数学上叫做环面.游泳圈和救生圈的表面都是环面.

环面的几何性质,既有一些与球面相同,也有一些与球面不同.

首先从生成看,环面和球面一样也是旋转曲面,且都是由圆绕一条直线旋转而成,不过球面是由圆绕其直径所在直线旋转得到的,而环面则是由圆绕其所在平面上与圆相离的一条直线旋转得到的(见图1,图2).

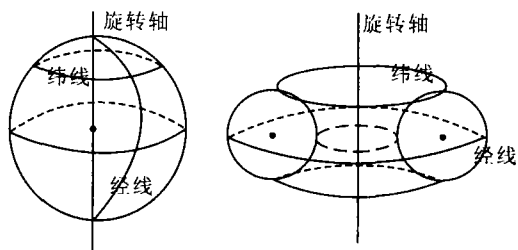


图1

图2

图3是环面的一个直观图.

再从形状看,环面和球面一样,都是空间中的中心对称图形,且都是轴对称图形.

本文将着重介绍环面与球面的如下两个不同的性质.

一、球面上任意画一个圆,然后将这个圆在球面上慢慢缩小,最终可以连续地收缩成一个点.数学上称具有这种性质的曲面为单连通的.球面是单连通的(平面也是单连通的;但平面上介于两个同心圆之间的区域——叫平环就不是单连通的,这是因为如图4中包含小圆的任一圆圈C不能越过它所包围的圆洞在平环内连续地收缩成一点).

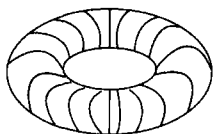


图3

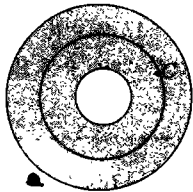


图4

我们来看环面,见图5,虽然环面上的圆圈 C_1 能在环面上连续收缩成一点,但环面的任一经圆 C_2 (环面与过旋转轴的平面的截面)和任一纬圆 C_3 (环面与垂直于旋转轴的平面的截面)都不能在环面上连续收缩成一点.因此环面不是单连通的.这是环面与球面的一个重要的不同点.

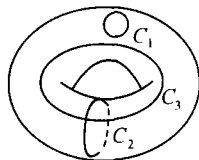


图5

二、平面上任意画一个圆圈儿,都把平面分成内外两部分,连接不同部分的任意两点的连线必与圆圈相交.或者更形象地说,沿圆圈剪一周,一定可以从平面上剪下一个圆片,球面也具有这个性质.球面上任意画一个圆圈儿,一定能把球面分成两部分,或者说沿着圆圈剪一周,必定把球面分成互相分离的两块,然而环面不具有这个性质.例如环面上的任一经圆或纬圆,都不能把环面分成两部分,即沿经圆或纬圆剪一周,都不能把环面分成互相分离的两块,得到的仍然是连在一起的一整块.可以参看图5想象剪的结果.这是环面与球面的又一个重要的不同点.

下面介绍环面的另一个生成方法(过程见图6).

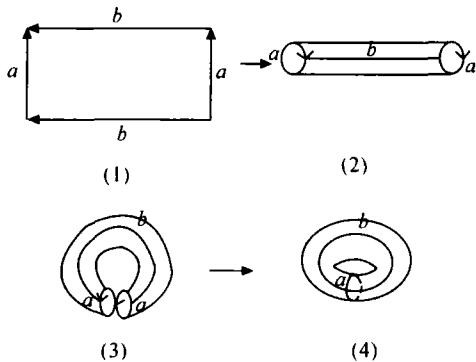


图6

取一张弹性极好的长方形橡皮薄膜,两对对边分别标以 a 和 b 并分别附有相同的箭头方向(见图6(1));先将一对对边 b 按箭头方向相同粘在一起得一圆柱面(见图6(2));再使圆柱面两端向中间弯曲(见图6(3));将两端的圆 a 按箭头方向粘在一起得环面(见图6(4)).

有时为研究和表达方便,我们不画环面的直观图,就用矩形来表示由它按上述步骤粘合对边生成的环面.注意,这时矩形的每一对对边表示生成环面上的同一条曲线(分别是环面的一条经线和一条纬线).

一个趣题,有甲、乙、丙三户人家,各修小路直接通往水井(A)、粮仓(B)和柴房(C),希望这9条小路互不相交.

中学生数学



数苑纵横

能否做到?若能,请具体画出,若不能,请说明理由.

在平面上是不可能做到的.如图7, A 甲、甲 C、C 丙和丙 A 组成平面上的一个封闭的圈儿,而 B 和乙分别位于圈内和圈外,因此乙和 B 的任一连线必定和圈儿相交.

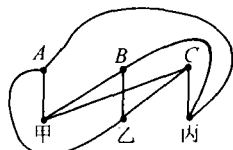


图 7

在球面上也和在一平面上一样是不可能做到的.但这三户人家是住在环面上,9 条小路不相交的要求是完全可以做到的,一种画法见图 8,其中(1)是在环面直观图上画的,(2)是在表示环面的矩形上画的.

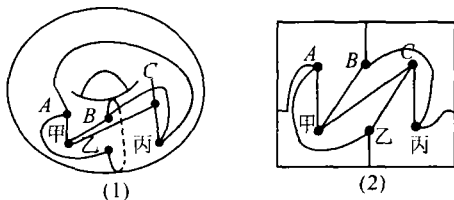


图 8

传说从前有一个国王,出了一道难题为公主招亲,答对者即为驸马.题目是:在如图 9 的图中,设法将每两个标号相同的圆圈用线段相连,使图中所有线段(包括新连接段和原

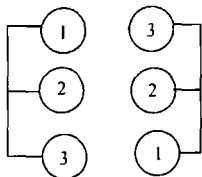


图 9

有线段)都不相交.在平面上这是不可能做到的(为什么?),据说因此公主终身未嫁.倘若当时有人想到把图 9 画在环面上,则他必当驸马爷无疑,一种答案如图 10.

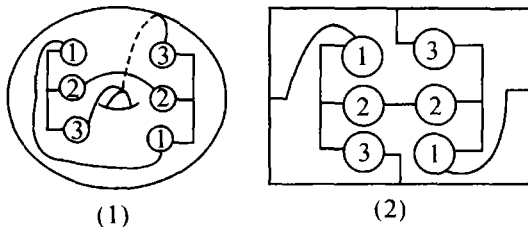


图 10

一个有趣的结果.平面上(或球面上)给地图着色,只要四种颜色就足够了,这个四色猜想困扰了人类 100 多年才得以解决.而在比平面和球面复杂得多的环面上,类似的问题却早就解决了.数学家早已证明给环面地图着色有七种不同的

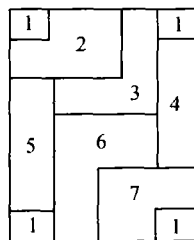


图 11

颜色就足够了.至少需要七种颜色,是因为环面上确有这样的情形:七个国家中每一个国家都同时与其他六个国家接壤.图 11 是在生成环面的矩形上画出的上述这种情形.

(责审 余炯沛)

(上接第 32 页)

在 $\triangle BSA'$ 中由余弦定理可得 $BA' \approx 50.1$.

答 小蚂蚁要吃到食物的最短行程为 50.1 毫米.

例 4 已知圆台的上、下底面半径 r, R 分别为 2cm、4cm, AB 是侧面上的母线,长为 6cm, AB 处有一透明玻璃将圆台隔开,一只蚂蚁在 A 处发现另一侧的 B 处食物.蚂蚁必须绕圆台的侧面一周到 B 处,求蚂蚁的最短行程.

解 展开圆台的侧面(如图 4),则蚂蚁的最短行程为 $AE + EB'$. (而不是 AB')

$$\because \frac{SB}{SA} = \frac{r}{R} \text{ 得 } \frac{SB}{SB+6} = \frac{2}{4}, \text{ 得 } SB=6,$$

在 $\text{Rt}\triangle ASE$ 中, $SA=12, SE=6,$

$$\therefore AE=6\sqrt{3}, \angle ASE=60^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle BSB' = \frac{2 \times 2\pi}{6} = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ESB' = 60^\circ. \therefore \widehat{EB'} \text{ 长} = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi,$$

$$\therefore AE + \widehat{EB'} = (6\sqrt{3} + 2\pi) \text{ (cm)}.$$

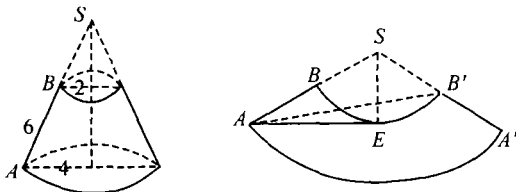


图 4

答 蚂蚁的最短行程为 $(6\sqrt{3} + 2\pi)$ 厘米.

动物“数学家”不仅只有蚂蚁,还有很多其它动物都有过硬的数学才能,这是大自然的造化——数学制造.

(责审 周春荔)

中学生数学