中学生数学·2016年9月上·第545期(高中)

直角走廊问题的研究与拓展

江苏省张家港市常青藤实验中学高一拔尖班(215600)　钱思源
指导教师　何睦

苏教版普通高中课程标准实验教科书必修四第50页有这样一个问题：

一铁棒欲通过如图1所示的直角走廊，试回答下列问题：

(1)证明棒长 $L(\alpha)=\dfrac{9}{5\sin\theta}+\dfrac{6}{5\cos\theta}$；

(2)求 $L(\alpha)$ 的最小值(用计算器或计算机)；

(3)解释(2)中所求得的 L 是能通过这个直角走廊的铁棒的长度的最大值.

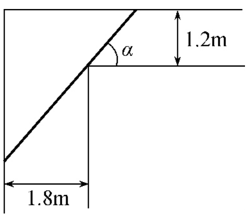

图1

该题是一道非常有趣的应用题，其形式新颖，又贴近生活实际，很快吸引了我的眼球，引发了我的思考：题目中展现的是一个不等宽的直角走廊，如果换成等宽直角走廊，情况又有何变化？若将直角走廊换成折线形走廊、弯角走廊，将木棒变成有厚度的平板小车(或木板)，情况又是怎样的呢？这些疑问促成了我对这个问题的研究之旅.

一切研究都要从简单开始，为此我们先来研究不计厚度的木棒的等宽直角走廊问题

一木棒欲通过如图所示的等宽直角走廊，以下我们来探究能通过直角走廊的木棒(厚度忽略不计)的长度的最大值.

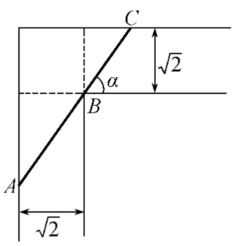

图2

如图2，$AB=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}$，$BC=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}$，设木棒的长度为 $L(\alpha)$.

则 $L(\alpha)=AC=AB+BC=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$，

即 $L(\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$，

令 $t=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$，

因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $t\in(1,\sqrt{2}]$，

则 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

$L=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2-1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{t-\dfrac{1}{t}}$，当 $t\in(1,\sqrt{2}]$ 时，$t-\dfrac{1}{t}$ 随 t 的增大而增大，$t-\dfrac{1}{t}\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$，$L_{\min}=4$.

若铁棒的长度不大于4，则木棒能在这个直角走廊拐弯；若木棒长度大于4，则这个木棒不能在这个直角走廊拐弯，故4是能在这个直角走廊拐弯的铁棒中的最长者. 所以能够通过这个直角走廊的铁棒的最大长度为4.

进一步思考1　如果将不计厚度的木棒变成有宽度能灵活转动的平板车呢？

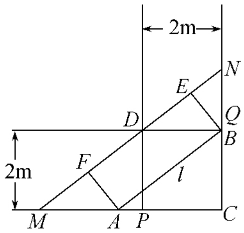

图3

如图3所示，一条直角走廊宽为2米. 现有一转动灵活的平板车，其平板面为矩形 $ABEF$，它的宽为1米. 直线 EF 分别交直线 AC、BC 于 M、N，过墙角 D 作 $DP\perp AC$ 于 P，$DQ\perp BC$ 于 Q.

(1)若平板车卡在直角走廊内，且 $\angle CAB=\theta$，试求平板面的长(用 θ 表示)；

(2)若平板车要想顺利通过直角走廊，其长度不能超过多少米？

解　(1) $DM=\dfrac{2}{\sin\theta}$，$DN=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$MF=\dfrac{1}{\tan\theta}$，$EN=\tan\theta$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则

$EF=DM+DN-MF-EN=\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{2}{\cos\theta}$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$-\frac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta)-1}{\sin\theta\cos\theta}$.

(2)“平板车要想顺利通过直角走廊”的含义是指对任意角 $\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$,平板车的长度不能超过 EF 长度的最小值,即平板车的长度 $\leqslant EF_{\min}$,以下我们来探求 $EF_{\min}$.

记 $\sin\theta+\cos\theta=t,1<t\leqslant\sqrt{2}$,

有 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$,

$EF=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta)-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{4t-2}{t^2-1}$,

令 $4t-2=m,m\in(2,4\sqrt{2}-2]$

则 $t=\frac{m+2}{4}$,则 $h(m)=\frac{16}{m-\frac{m}{12}+4}$,

$h(m)$ 在 $m\in(2,4\sqrt{2}-2]$ 上单调递减,

因此当 $m=4\sqrt{2}-2$ 时,即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,可取 $EF_{\min}=4\sqrt{2}-2$.

答:若平板车要想顺利通过直角走廊,其长度不能超过 $(4\sqrt{2}-2)$ 米.

进一步思考2 如果将等宽直角走廊变为非等宽直角走廊呢?

如图4,一条直角走廊宽分别为1m和8m,若一根铁棒 EF 能水平地通过此直角走廊,求此根铁棒的最大长度.

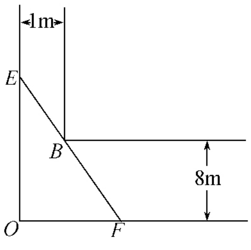

图4

解 设 $\angle EFO=\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$,如图4,$BF=\frac{8}{\sin\alpha}$,$BE=\frac{1}{\cos\alpha}$,设木棒长度为 $L(\alpha)$,则 $L(\alpha)=\frac{8}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$. 以下探求函数 $L(\alpha)$ 的最小值.

$L(\alpha)=\frac{8}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$,则 $L'(\alpha)=\frac{\sin^3\alpha-8\cos^3\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$,令 $L'(\alpha)=0$,

则 $\sin\alpha=2\cos\alpha$,即 $\tan\alpha=2$,

令 $\tan\alpha_0=2(0<\alpha_0<\frac{\pi}{2})$,

当 $\alpha\in(0,\alpha_0)$ 时,$L'(\alpha)<0$;

当 $\alpha\in(\alpha_0,\frac{\pi}{2})$ 时,$L'(\alpha)>0$;

所以 $\alpha\in(0,\alpha_0)$ 时,函数 $L(\alpha)$ 单调递减;$\alpha\in(\alpha_0,\frac{\pi}{2})$ 时,函数 $L(\alpha)$ 单调递增.

因此当且仅当 $\alpha=\alpha_0$,即 $\tan\alpha_0=2$ 时,可取得函数 $L(\alpha)$ 的最小值,即能通过该直角走廊的木棒的最大值. 此时 $\sin\alpha_0=\frac{2}{5}\sqrt{5}$,$\cos\alpha_0=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$L(\alpha)_{\min}=L(\alpha_0)=5\sqrt{5}$.

答:若木棒能通过该直角走廊,此木棒的最大长度为 $5\sqrt{5}$ 米.

进一步思考3 如果将等宽直角走廊变为等宽折线形走廊呢?

如图5,一条转角处角度为120°的等宽走廊宽为1m,若一根铁棒 EF 能水平地通过此直角走廊,则此根铁棒的最大长度为______.

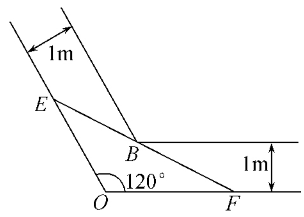

图5

解 设 $\angle BFO=\frac{\pi}{6}-\alpha(-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{6})$,

如图5,

$BF=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)}$,$BE=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)}$,

则铁棒的长度为 $L(\alpha)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)}+\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}=\frac{4\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-3}$,

令 $t=\cos\alpha,t\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$,则 $L=\frac{4}{4t-\frac{3}{t}}$,易知当且仅当 $t=1$ 时可取得铁棒的最小值4.

此时 $\alpha=0$,即 $\angle BFO=\frac{\pi}{6}$ 时,能通过该折线形走廊的铁棒的最大值为4.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

进一步思考4　如果将等宽直角走廊变为等宽弯角走廊呢？

一走廊拐角处的横截面如图6所示，已知内壁FG和外壁BC都是半径为1m的四分之一圆弧，AB、DC分别与圆弧BC相切于B、C两点，$EF\parallel AB$，$GH\parallel CD$，且两组平行墙壁间的走廊宽度都是1m.

(1)若水平放置的木棒MN的两个端点M、N分别在外壁CD和AB上，且木棒与内壁圆弧相切于点P. 设$\angle CMN=\theta$(rad)，试用θ表示木棒MN的长度$f(\theta)$；

(2)若一根水平放置的木棒能通过该走廊拐角处，求木棒长度的最大值.

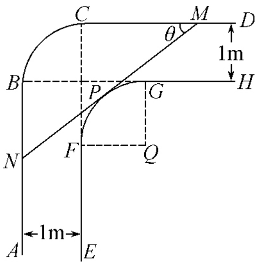

图6

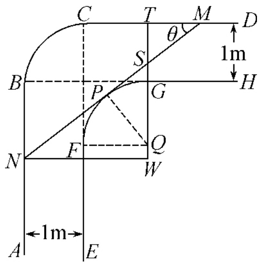

图7

解　(1)如图7，设圆弧FG所在的圆的圆心为Q，过Q点作CD垂线，垂足为点T，且交MN或其延长线与于S，并连接PQ，再过N点作TQ的垂线，垂足为W. 在$\mathrm{Rt}\triangle NWS$中，因为$NW=2$，$\angle SNW=\theta$，所以$NS=\dfrac{2}{\cos\theta}$.

因为MN与圆弧FG切于点P，

所以$PQ\perp MN$，

在$\mathrm{Rt}\triangle QPS$，因为$PQ=1$，$\angle PQS=\theta$，

所以$QS=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$QT-QS=2-\dfrac{1}{\cos\theta}$，

①若S在线段TG上，则$TS=QT-QS$.

在$\mathrm{Rt}\triangle STM$中，$MS=\dfrac{TS}{\sin\theta}=\dfrac{QT-QS}{\sin\theta}$，

因此$MN=NS+MS=NS+\dfrac{QT-QS}{\sin\theta}$.

②若S在线段GT的延长线上，则$TS=QS-QT$.

在$\mathrm{Rt}\triangle STM$中，$MS=\dfrac{TS}{\sin\theta}=\dfrac{QS-QT}{\sin\theta}$，

因此$MN=NS-MS=NS-\dfrac{QS-QT}{\sin\theta}$

$$=NS+\frac{QT-QS}{\sin\theta}$$

$$f(\theta)=MN=NS+\frac{QT-QS}{\sin\theta}$$
$$=\frac{2}{\cos\theta}+\left(\frac{2}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$
$$=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta)-1}{\sin\theta\cos\theta}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

(2)设$\sin\theta+\cos\theta=t(1<t\leqslant\sqrt{2})$，

则$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$，

因此$f(\theta)=g(t)=\dfrac{4t-2}{t^2-1}$，

令$4t-2=m$，$m\in(2,4\sqrt{2}-2]$，

则$t=\dfrac{m+2}{4}$，则$h(m)=\dfrac{16}{m-\dfrac{m}{12}+4}$，$h(m)$在$m\in(2,4\sqrt{2}-2]$上单调递减，因此当$m=4\sqrt{2}-2$时，即$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，可取$MN_{\min}=4\sqrt{2}-2$.

答：一根水平放置的木棒若能通过该走廊拐角处，则其长度的最大值为$(4\sqrt{2}-2)$米.

我们知道，三角函数是刻画现实世界的重要模型，直角走廊问题则是三角函数在现实生活中的一个具体应用. 通过对直角走廊问题的研究和思考，我愈加明晰了进行数学研究遵循“问题情境、建立模型、数学结果、解释应用与拓展”的逻辑线路，同时也更加深刻地领悟到直角走廊问题的数学本质其实是过定点的线段的最值问题. 通过对由教材习题引出的直角走廊问题以及其变化的研究、总结和思考，我认为在平时的数学学习过程中，对于教材上的例题和习题，不能仅仅以解决习题本身为目的，更应该在老师的引导下对其进行深入的研究，发掘、积累其中蕴含的数学思想方法，感悟问题的数学本质. 对数学思想方法和数学本质的领悟更能帮助我们提高分析问题、解决问题的能力，不断的提升我们的数学素养，对于我们将来的工作、学习大有裨益.

(责审　张思明)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net