数学史话

尺规作图的过往

佘岩
（北京汇文中学，北京 100061）

尺规作图是中学几何证明学习的良好工具，它亦能培养逻辑思维能力.尺规作图的起源不仅仅为培养思维，更是要解决数学问题.尺规作图是由几何作图发展而来，而几何作图是几何学产生、发展的产物.我们今天就来一起追溯尺规作图的过往.

1 几何作图与尺规作图

几何作图兴起于希腊数学史上的雅典时期（公元前5世纪—公元前3世纪）.为几何作图的兴起奠定思想基础的，首推阿那克萨哥拉（Anaxagoras，公元前500－前428）.他是希腊数学史上有据可查的最早着手解决三大几何作图问题的人.

最初解决几何作图问题时，人们对作图工具并无标准的要求.但随着研究问题的深入，古希腊人尝试用更简单的工具完成作图.一方面是希望建立几何作图的标准，另一方面起到训练智力的效果.基于此，尺规作图应运而生.

历史上最早提出尺、规限制的，是雅典时期天文学家、数学家伊诺皮迪斯（Oenopides，约公元前465年前后）.他利用几何作图解释宇宙现象，认为直线和圆是宇宙运动的基本形式.因此，一切图形都应由画直线的尺和画圆的规来作出.伊诺皮迪斯只用尺规发现了两个著名命题：由给定直线外一点作该直线的垂线；求作一角等于已知角.两命题也编入了欧几里得（Euclid，公元前330年—公元前275年）的《几何原本》中.伊诺皮迪斯的尺规作图法当时并未被大多数人接受.而尺规作图作为几何作图最基本的形式被确定下来是在《几何原本》.

《几何原本》是数学理论演绎化的必然结果.一切推论必须建立在公理或公设的基础上.作图也是一样.一种作法被认可，必须有从公设出发的演绎证明作保障.因此，尺规作图问题为欧几里得提炼作图公设提供了思想启示.欧几里得体系中，由于几何作图公法的建立在处理几何作图问题时并不要求精确实际作图，而是从理论上证明只用直尺和圆规能够找到画图的方法.这也令几何作图的作用发生了质的飞跃.

2 尺规作图的相关研究

尺规作图不仅限于研究几何学问题，同样应用于代数学、三角学与分析等各初等数学分支.M.克莱因曾说：“在欧多克斯（Eudoxus，公元前408年—公元前355年）以后的两千年间，几何学变成几乎是全部严密数学的基础.”由此可见，几何作图在古希腊的重要地位.在几何作图的发展过程中，古希腊数学家逐步认定几何是数学的本源.他们把大部分代数问题都化成了几何，对数学量的命名往往依据其几何意义（如平方、立方等）；解方程、数系的发展也都依赖几何作图；不认可无几何意义或无法作图的量.特别是在不可公度量及欧多克斯用几何构造出无理数后，希腊人便放弃了真正的代数和无理数.对几何作图的过分依赖也阻碍了古希腊数学的发展.但凡事都有两面性，几何学的停滞也促使数学家开始寻求其他方法、角度、手段研究未解决的几何问题，进而产生了更多的数学分支.

随着《几何原本》被译为多种语言，数学家开始尝试限止或减少几何作图的工具.980年左右，阿拉伯数学家提出用直尺和一个固定限度的圆规作图.18世纪，意大利几何学家马歇罗尼（Mascheroni，公元1750年—1800年）证明了每一个能用圆规直尺构造出来的图形都

能够只用圆规完成.而早在1672年,G.摩尔在丹麦文《欧几里得》一书中,就呈现了马歇罗尼结论的证明.法国数学家彭赛列(Poncelet,公元1788年—1867年)发现,只要在作图平面上有一个圆及其圆心存在,所有的欧几里得作图都能只用直尺完成.十一年后的1833年,德国数学家斯坦纳(Steiner,公元1796年—1862年)证明了彭赛列的结论.实际上,人们还尝试限制或固定直尺的长度、圆规的大小完成几何作图问题.艾德勒(August dler,公元1863年—1923年)证明,任何欧几里得作图可用一"双边直尺"作出.除此之外,数学家也考虑过给定作图题的最优欧几里得解的问题.

关于三大几何作图难题:倍立方、化圆为方、三等分任意角,最终的答案是无法用尺规作图作出.三个问题的证明方法均是借助代数理论证明而得.其中,化圆为方问题是德国数学家林德曼(Lindermann,公元1852年—1939年)在1882年解决的.他首先证明了圆周率π是超越数,又证明尺规作图不可能作出超越数,由此说明尺规作图无法解决化圆为方问题.倍立方和三等分角问题是法国天才数学家伽罗瓦(Galois,公元1811年—1832年)在1830年证明的.他创造了"伽罗瓦理论",并用其证明倍立方和三等分角不能用尺规作出.在经历了两千多年的发展后,三大几何作图问题终于得以解决.

3 尺规作图与中国的联系

由于《几何原本》直到元代才传入中国,明朝才由利玛窦、徐光启将其翻译成中文,我们已很难查到中国古代数学家对三大几何作图问题的探索.但尺规和几何作图在中国产生时间很早,夏朝便已出现了"规矩"一词.与西方尺规作图的研究不同,我国古代使用几何作图更关注其实用价值,因此创造出角尺、活动尺等工具应用于建筑制造中.直到20世纪80年代,尺规作图的研究终于印上了中国人的烙印.1979年、1982年,美国几何学家佩多(Pedoe)提出,已知两点,能否只用一把生锈的圆规(只能画半径为一的圆)找到第三个点,构成一个等边三角形?能否只用一把生锈的圆规作出两点的中点?这两个问题分别被时任中国科技大学教师的单墫、张景中、杨路和19岁自学青年侯晓荣在1983年、1985年解决.

回顾几何作图的历史可以发现,数学的两大基石:数与形的发展是相辅相成的.而两者发展的核心仍在于人们对于问题的不断探索和穷则思变的人类智慧.几何作图的意义不仅是获得了新知,更在于形成了严密的演绎推理.因此当代的中学数学教学中,几何作图仍是平面几何的重要学习内容.现在的初中教材中,保留了直线形的几何作图,要求我们不仅要知道作图的步骤,而且要能知道实施这些步骤的理由.此要求也是希望我们能够知其然亦知其所以然,充分的发挥几何作图的思维价值.

编者按 本文提纲挈领式地概述了"尺规作图的过往",如果你还需要较为细致地了解一些数学知识内容,比如:几何作图公法,尺规作图的可能性准则,三大尺规作图不能问题,等分圆周的尺规作图,单用圆规的作图,单用直尺的作图,佩多(Pedoe)提出的两个生锈圆规作图问题,尺规作图的教育功能等,可参阅湖南教育出版社2000年4月出版的数学科普读物《尺规作图话古今》(梅向明 周春荔编著),该书有较为详尽的介绍.

(责审 周春荔)

智慧窗《趣换数字》

参考答案

(1) $1^2+2^2+3^2+7^2+8^2+22^2+25^2+28^2=2020$;

(2) $0^2+10^2+1^2+2^2+16^2+17^2+23^2+29^2=2020$;

(3) $0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+7^2+9^2+20^2+26^2+28^2=2020$;

(4) $6^2+8^2+10^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2+18^2+19^2=2020$.