



引起争议的求定义域问题

北京师范大学数学科学学院(100875) 余炯沛

下面是一个有争议的问题:

已知函数 $y=f(2^x)$ 的定义域为 $[1,2]$, 求 $f(x)$ 的定义域.

有两种不同的解答.

甲 设 $t=2^x$. 由 $1 \leq x \leq 2$ 得 $2 \leq t \leq 4$, 故 $f(t)$ 的定义域为 $[2,4]$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $[2,4]$.

乙 答案是不确定的.^[1] 因为由 $1 \leq x \leq 2$ 只求得函数 $t=2^x$ 的值域 $[2,4]$, 而 t 的值域不一定是函数 $f(x)$ 的定义域, 题目又没有给出 $f(x)$ 具体表示式, 所以无法确定其定义域. 举一个与甲的答案不同的例子: 如设 $f(x) = \sqrt{-x(x-2)(x-4)}$, 则 $f(2^x) = \sqrt{-2^x(2^x-2)(2^x-4)}$ 的定义域也是 $[1,2]$, 但 $f(x)$ 的定义域不是 $[2,4]$, 而是 $(-\infty, 0] \cup [2,4]$.

为了弄清引起争议的原因, 我们有必要了解一下复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的构造. 笔者随手翻阅了一本高等数学教材^[2], 看到如下的定义.

定义 设有函数 $y=f(t)$ 和 $t=\varphi(x)$, 如果 $x \in D_\varphi$ 所确定的值 $t=\varphi(x)$ 属于或部分属于函数 $y=f(t)$ 的定义域 D_f , 那么, 通过 t, y 是 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$, 称其为 $y=f(t)$ 与 $t=\varphi(x)$ 的复合函数, 而称 t 为中间变量, x 为自变量.

在其他多本高等数学教材中看到的定义与此基本相同, 只有文字上的差别.

在定义中, D_f 是指 $f(t)$ 在复合之前的定义域. “ $t=\varphi(x)$ 属于或部分属于函数 $y=f(t)$ 的定义域 D_f ”, 这句话意味着复合之后 t 的值不会超出 D_f . 换言之, t 的这些值组成的集合是 D_f 的一个子集, 它不一定等于 D_f . 除了这一包含关系外, 定义对 D_f 不再其他的约束, 当 t 没有取遍 D_f 中的值时, 也不改称 t 的值域为 $f(t)$ 的定义域.

例如, $f(t)=2^t, t=\sqrt{x}$, 当 $x \in [0, +\infty)$

时, 复合函数 $y=2^{\sqrt{x}}, x \in [0, +\infty)$, 这里 $t=\sqrt{x}$ 的值域是 $[0, +\infty)$, 而 $f(t)=2^t$ 的定义域 D_f 是 $(-\infty, +\infty)$, 而不是 $[0, +\infty)$.

又如, 复合函数 $y=\lg \sin x$, 是由 $y=\lg t, t=\sin x$ 合成的, 当 $x \in \{x | 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 时, t 的值域为 $(0, 1]$, 函数 $y=\lg t$ 的定义域是 $(-\infty, 0]$, 而不是 $(0, 1]$.

回顾本文开头的问题, “已知 $f(2^x)$ 的定义域为 $[1,2]$, 求 $f(x)$ 的定义域”. 从文字上看, 所求的当然是使表达式 $f(x)$ 有意义的 x 值的集合, 不问其中有多少 x 被变量 t 置换. 从复合函数的构造上看, 该已知函数由 $f(t), t=2^x, x \in [1,2]$ 合成, 可知 t 的值域 $[2,4]$ 仅是 $f(t)$ 的定义域的子集, 没有理由说 $[2,4]$ 就是 $f(t)$ 定义域. 由此可知, 这道题中, 函数 $f(x)$ 的定义域是无法确定的. 在给定条件下没有确定答案, 这样的题目是有缺陷的. 面对这道题, 甲误把中间变量 t 的值域认作 $f(x)$ 的定义域, 显然有悖于复合函数构造的定义. 乙虽然没有从根本上说明道理, 但其解答是正确的.

笔者认为, “已知函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域, 求 $f(x)$ 的定义域” 这类有缺陷的题, 对学生是有害的. 因为中学教材里没有深入研究复合函数的构造, 学生容易受其误导, 所以希望在学生的练习题中不再出现这类题目.

参考文献

- [1] 张治国. 一道不容忽视的错解. 中学生数学, 2006, 9(上).
[2] 李建平主编. 微积分. 湖南大学出版社. 2001年第一版.

编后 文章探索了一类求定义域问题中的错误. 对于该类问题, 许多中学数学老师也有不同的观点. 为了让大家共同讨论这一问题, 我们选编了田富德老师的论文《一道例题解答之我见》, 吴玉萍老师的论文《错解其实没有错》, 以供大家交流讨论. (责审 连四清)