数学阅读浅谈

北京师范大学附属实验中学(100032)　曹付生

阅读是人类社会生活的一项重要活动,是人类认识世界、汲取知识的重要手段及途径.数学阅读与一般阅读有着相同的特征,以获取数学知识解决问题的能力与方法为目的.同时,由于数学语言的符号化、逻辑化、严谨性、抽象性等特点,数学阅读又有其特殊性.数学阅读作为一种能力和学习方式,对于学生来说是非常重要的.

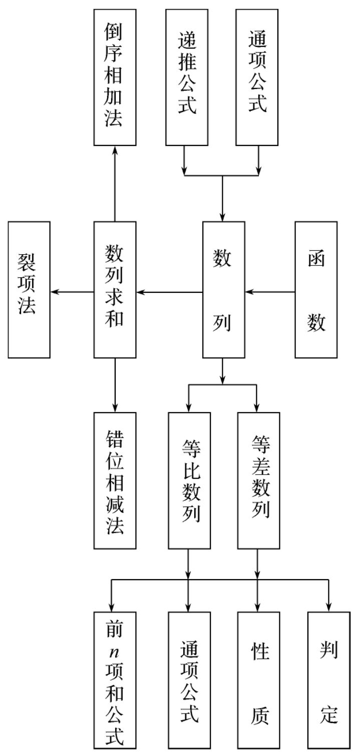
数学阅读根据数学学科的特点,有知识构架的阅读,有概念、定理、公式、法则等的阅读,有问题的阅读,有方法的阅读等等.

一、框架阅读

所谓框架阅读,就是通过数学阅读了解所研究内容的全部,可以通过阅读目录来了解所学知识的框架结构,通过预习,了解知识之间的内在联系,了解教材编排的意图,宏观把握知识的发生、发展的过程.

现在教科书的编写,充分为数学阅读提供了素材,比如,每册书前都有《本册导引》,每一章开篇也是一篇导引,这些都有助于学生通过自己的阅读,对本章、本册书的内容做一个了解,知道学习这些内容的目的及要求,特别是所涉及知识的来龙去脉,易于激发学生的学习热情.

例如对《数列》一章的阅读,根据知识之间的关系,可以得到如图的框架结构.



从中,不仅能了解本节知识之间的相互关系,同时也能明确各知识点之间的内在逻辑关系,即对知识的发生、发展的脉络也给予了展示.同时,用函数的观点认识数列及本节所涉及的重要方法如裂项法、倒序相加法、错位相减法等也在框架中进行了突出展示.

二、概念阅读

概念是数学的重要组成部分,概念阅读主要是准确理解字、词、句的正确含义,并根据数学的特点,还要正确理解文字语言、图形语言、符号语言之间的相互转换.当然,还要根据概念所处的地位进行分析,比如与之前知识的联系、在本阶段的作用、所应用的范围、所受的局限等.

例如对高中函数概念的阅读,函数概念是贯穿整个中学数学的一个重要的概念,它的形成分几个阶段,定义的方式在不同的阶段也有所不同.因此,在高中阅读函数的概念,即要分析函数概念本身所涉及到的内容,还要分析与初中函数概念的不同与联系等.

高中教材中函数的定义是:设集合A是一个非空的实数集,对A内任意实数x,按照确定的对应法则f,都有唯一确定的实数值y与它对应,则这种对应关系叫做集合A上的一个函数.记作:$y=f(x)$,$x\in A$,其中x叫做自变量,自变量取值范围(数集A)叫做这个函数的定义域.

对这一概念的阅读,即要有表面上对符号文字的理解,同时更要有对其所表达的含义的理解.比如:对两个集合的要求、对映射的理解、对符号(对应法则)f的理解,还有读出表面上没有表达出的意义:如函数的二要素定义域、对应法则,再比如,如何确定两个集合之间是否具有函数关系等等.

传统定义:设在一个变化过程中有两个变量x与y,如果对于x的每一个值,y都有唯一的值与它对应,那么就说x是自变量,y是x的函数.

二者之间的区别与联系是认识函数的重要内容:两者本质相同.两者中的定义域和值域完全相同,两个定义中的对应法则实际上也一样,只是叙述的出发点不同,传统定义是从运动变化的观点出发,其中的对应法则是将自变量的每一个取值与唯一确定的函数值对应起来,近代定义的对应法则则是从集合与对应的观点出发,其中的对应法则是将原象集合中的任一元素与象集合中的唯一确定的元素对应起来等等.当然对此概念的阅读还要包括二者的优、缺点等.

三、问题阅读

这里所谈的问题阅读,主要指对具体的数学习题的阅读,即通常所说的审题及解决问题.问题是数学的心脏,数学的学习就是一个接着一个问题的解决,数学能力高低,主要是看对数学问题能否进行正确快捷地解决.在对问题进行阅读时,要注意题目中的关键词、重点语句等,特别是要搞清已知关系与未知关系.问题解决的关键则是通过阅读、思考,寻求已知与未知的关系,进而得到解决问题方法.

例1 (2012年普通高等学校招生全国统一考试文科数学第16题)设函数$f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$的最大值为$M$,最小值为$m$,则$M+m=$________.

通过对题目的阅读分析,题目中关注的是两个最值的和,而不是其大小.因而采用只设不求,整体分析的方法求解.$f(x)=1+\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$,令$g(x)=\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$,则$g(x)_{\max}=M-1$,$g(x)_{\min}=m-1$.又发现$g(x)$为奇函数,故$g(x)_{\max}=-g(x)_{\min}$,得$M+m=2$.

做为考试的题目,已经得出了结果,应该是完美的答案.

但对于平时的阅读与解决,只满足于此,就降低了题目的作用,缺少了对思维的锻炼.

出于对整个试卷难度的控制、也或是知识点的考查范围、也或是对本题难度的要求等,题目中直接告知函数$f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$有最大值、有最小值.而对数学问题的研究而言,这是不严谨的.因此,再对本题进行阅读分析时,就要提出这样的问题,函数$f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$的最值是否存在?(考场上没有时间也不需要进行这样的阅读)

提出这样的问题,无疑提升了问题阅读的质量,对数学的严谨性会有深层上的认识,如果能够进行解决,也会对思维能力有所提高.这也正是数学学习所追求的结果.

当然对于提出的问题,不用怀疑题目的正确性,但利用现阶段所学的知识,虽然不能求出最大值及最小值,而其存在性还是能证明的(但是比较繁琐,估计正因如此,高考题进行了回避).

因此在问题阅读过程中,要有提出问题并解决问题的意识,这样才能保证阅读质量,起到"真正"阅读的作用.

四、方法阅读

对方法的阅读,要结合问题,明晰方法的来源,即如何想到的,因此,要总结一类问题的常规解法.还要考虑此方法是否具有"可持续发展性",即是特殊方法,还是一般常规方法,这一方法是最简捷、有效的方法,是否有改进的可能等.

例2 (2010年高考北京卷第19题)在平面直角坐标系xOy中,点B与点$A(-1,1)$关

于原点 O 对称，P 是动点，且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.

（Ⅰ）求动点 P 的轨迹方程；

（Ⅱ）设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M、N，问：是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

（Ⅰ）解　因为点 B 与 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，所以点 B 得坐标为 $(1,-1)$，设点 P 的坐标为 (x,y)，由题意得 $\frac{y-1}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$，化简得 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$. 故动点 P 的轨迹方程为 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

（Ⅱ）解法一　设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，点 M、N 的坐标分别为 $(3,y_M)$、$(3,y_N)$. 则直线 AP 的方程为 $y-1=\frac{y_0-1}{x_0+1}(x+1)$，直线 BP 的方程为 $y+1=\frac{y_0+1}{x_0-1}(x-1)$.

令 $x=3$，得　$y_M=\frac{4y_0+x_0-3}{x_0+1}$，

$y_N=\frac{2y_0-x_0+3}{x_0-1}$.

于是 $\triangle PMN$ 的面积：

$$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|y_M-y_N|(3-x_0)=\frac{|x_0+y_0|(3-x_0)^2}{|x_0^2-1|}.$$

又直线 AB 的方程为 $x+y=0$，$|AB|=2\sqrt{2}$，点 P 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}$.

于是 $\triangle PAB$ 的面积：

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=|x_0+y_0|.$$

当 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PMN}$ 时，

得　$|x_0+y_0|=\frac{|x_0+y_0|(3-x_0)^2}{|x_0^2-1|}$.

又　$|x_0+y_0|\neq0$，

所以 $(3-x_0)^2=|x_0^2-1|$，解得 $|x_0|=\frac{5}{3}$.

因为　$x_0^2+3y_0^2=4$，所以　$y_0=\pm\frac{\sqrt{33}}{9}$，

故存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等，此时点 P 的坐标为 $(\frac{5}{3},\pm\frac{\sqrt{33}}{9})$.

解法二　若存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等，设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，

则　$\frac{1}{2}|PA|\cdot|PB|\sin\angle APB=\frac{1}{2}|PM|\cdot|PN|\sin\angle MPN$.

因为　$\sin\angle APB=\sin\angle MPN$，

所以 $\frac{|PA|}{|PM|}=\frac{|PN|}{|PB|}$，即 $\frac{|x_0+1|}{|3-x_0|}=\frac{|3-x_0|}{|x_0-1|}$.

即　$(3-x_0)^2=|x_0^2-1|$，解得　$x_0=\frac{5}{3}$，

因为　$x_0^2+3y_0^2=4$，所以　$y_0=\pm\frac{\sqrt{33}}{9}$.

故存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等，此时点 P 的坐标为 $(\frac{5}{3},\pm\frac{\sqrt{33}}{9})$.

第二问的两种方法，方法一是常规解法，但运用算量较大，方法二，通过面积相等，得到线段之间的比值，进而投影到 x 轴上，求出未知量. 因调整了对已知条件的应用方式，就使得运算量明显减少.

进一步阅读会发现，延长 BA 交直线 $x=3$ 于 Q，Q 的坐标为 $(3,-3)$，点 A 恰是 BQ 的中点，且若 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等，则 $AN\parallel BM$，所以点 N 必为 QM 的中点，则点 P 为 $\triangle QBM$ 的重心. 若设 $M(x_0,y_0)$，则 P 点的坐标为 $(\frac{x_0+2}{3},\frac{y_0-2}{3})$，代入 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$，得 M 点的坐标，最终求得 P 点的坐标.

对方法的进一步阅读，发现了形与形之间更为深刻的关系，也使得问题解决变得更为简单. 当然，方法的简捷，源于思维的深刻及对条件认识的深入. 所以对于方法的阅读，只停留在表面上是不够的. 要想得到有效，快捷的解决问题的方法，必须提高阅读的有效性，提高阅读的质量.

（责审　余炯沛）