话说相反数

——教初一新生怎样学好数学概念

人大附中(100080) 陆剑鸣

对于刚升入初中的小同学来说,你一定很想学好数学,可是又苦恼没有有效的方法.这里我告诉你,学好数学要从学好数学概念入手,怎样透彻理解和掌握数学概念呢?下面以相反数为例谈谈怎样学好数学概念.

首先我们从不同的角度、从知识的联系中认识相反数.

(1)只有符号不同的两个数互为相反数;

(2)a 的相反数是 $-a$,$a-b$ 的相反数为 $-a+b$;$a+b$ 的相反数为 $-a-b$;

(3)若 a、b 互为相反数,则 $a=-b$ 或 $a+b=0$ 或 $|a|=|b|$;

(4)数轴上表示相反数的两个点关于原点对称,且到原点的距离相等;

(5)正数的相反数是负数,0 的相反数是 0,负数的相反数是正数;

(6)正数的相反数小于它本身,0 的相反数等于它本身,负数的相反数大于它本身;

(7)负数的绝对值等于它的相反数;

(8)减去一个数等于加上这个数的相反数.

对于相反数,我们不能只记住它的定义——只有符号不同的两个数叫做互为相反数;还要注意从不同的角度、从知识的联系中去认识它,理解它.比如以上我们分别从相反数的表示、运算角度、形的角度、大小关系角度、绝对值的角度、运算法则的角度去认识相反数,这样认识的概念自然就全面和深刻了.

其次,我们在辨析中认识相反数.

同学们,请你先判断下列说法是否正确.

(1)符号不同的两个数是相反数;(　　)

(2)$a+1$ 的相反数是 $1-a$;(　　)

(3)若 a、b 互为相反数,则 $\frac{b}{a}=-1$;(　　)

(4)一个数的相反数不可能等于它本身;(　　)

(5)若 a、b 互为相反数,则 a^2 与 b^2 互为相反数;(　　)

(6)若 a、b 互为相反数,则 a^3 与 b^3 互为相反数;(　　)

(7)互为相反数的两个数同一正偶次方相等.(　　)

以上七个小题中,(6)(7)是对的,其余都是错的.你的判断都对了吗?

这几个判断问题告诉我们,概念的叙述必须是准确的,如(1)中,符号不同的两个数,如 -2 和 $+3$ 不是相反数;不能忽视概念所包含的特殊情况,如(3)中,0 的相反数是 0,0 不能作除数,所以没有 $\frac{b}{a}=-1$;概念可以用来推理,如(6)中,因为 a、b 互为相反数,所以 $a=-b$,所以 $a^3=(-b)^3=-b^3$,所以 a^3 与 b^3 互为相反数.

最后,我们在应用中进一步理解和掌握相反数的概念.

例 1 已知:$a<b<0$,比较 $a+b$,$b-a$,$a-b$,$-a-b$ 的大小.

分析 我们用数轴比较这四个数的大小,由于 $a+b$ 和 $-a-b$,$b-a$ 和 $a-b$ 分别互为相反数,所以在数轴上先画出表示数 $a+b$ 和 $a-b$ 的点,再利用对称性画出数 $-a-b$ 和 $b-a$ 表示的点.

解 在数轴上画出 $a+b$,$b-a$,$a-b$,$-a-b$ 分别表示的点.(如图 1)

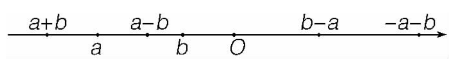

图 1

由图 1 得,$a+b<a-b<b-a<-a-b$.

例 2 求 $|a-b+1|-|b-a-1|$ 的值.

很多同学解决这个问题时,首先想到要对

a、b 进行分类讨论. 实际上，由于 $a-b+1$ 和 $b-a-1$ 互为相反数，所以原式的值为 0.

通过以上三个方面的讲解，你是否对“学好数学概念”有了一些体会和认识：

(1)从不同的角度理解概念，从知识的联系中认识概念；

(2)从辨析中透彻理解概念；

(3)从应用中真正掌握概念.

你领悟了吗？请你以“数轴”为例，检验一下自己.

首先，请你从不同的角度说说数轴，看你能说出多少？

(1)数轴是规定了原点、正方向和单位长度的直线；

(2)有理数能用数轴上的点表示；

(3)数轴上表示数 a 的点到原点的距离是 $|a|$；

(4)数轴上右边的点比左边的点表示的数大；

(5)数轴上表示相反数的两个点关于原点对称，到原点的距离相等；

(6)数轴上两点间的距离为 $AB=|x_A-x_B|$；

(7)将数轴上点 $A(a)$ 向右移动 $x(x>0)$ 个单位长度表示的数为 $a+x$，将数轴上点 $A(a)$ 向左移动 $y(y>0)$ 个单位长度表示的数为 $a-y$.

其次，请你应用数轴解决下列问题.

1. 如果 A 点表示的数为 m，将 A 点向右移动 n 个单位长度，再向左移动 p 个单位长度，那么，终点 B 表示的数是________；A、B 两点间的距离为________.

2. 若 $a>0$，$b<0$，且 $a+b<0$，将 a、$-a$、b、$-b$ 从小到大排列.

3. 已知：如图 2，数轴上两点 A、B 对应的数分别为 -1、2，点 P 为数轴上一动点，其对应的数为 x.

(1)若点 P 到点 A、点 B 的距离相等，则点 P 对应的数是________；

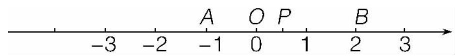

图 2

(2)数轴上是否存在点 P，使点 P 到点 A、点 B 的距离之和为 7？若存在，请直接写出 x 的值；若不存在，说明理由.

(3)当点 P 以每分钟 3 个单位长度的速度从 O 点向左运动时，点 A 同时以每分钟 1 个单位长度的速度向左运动，点 B 也同时以每分钟 10 个单位长度的速度向左运动，问经过几分钟，$PA=\frac{1}{2}AB$？（责审　韩乐琴）

(上接第 4 页)

注　将数学问题的某个部分看成一个整体，去作整体分析研究，达到顺利而又简捷地解决问题的目的，这就是整体分析的数学思想.

例 6　计算：$(2x-3y-1)(-2x-3y+5)$.

分析　此题直接用多项式乘法法则计算较繁，若把“-1”变为“$-3+2$”，“5”变为“$3+2$”，再巧妙分组，就可用乘法公式计算.

解　$(2x-3y-1)(-2x-3y+5)$

$=(2x-3y-3+2)(-2x-3y+3+2)$

$=[(2-3y)+(2x-3)][(2-3y)-(2x-3)]$

$=(2-3y)^2-(2x-3)^2$

$=9y^2-4x^2-12y+12x-5$.

注　将一个乍看不能用乘法公式解的问题，通过拆项、重组化归为乘法公式模型，使之轻松获解. 这种化繁为简、化陌生为熟悉的方法就是我们经常运用的转化的数学思想方法.

从以上几例可看出，千变万化的解题技巧，其实是根据题目特征对基本概念、公式、法则及数学思想方法的灵活运用. 即解题技巧源于扎实的基础知识和善于抓住题目特征的分析、观察能力. 因此，要学习、掌握解题技巧，首先要学好基础知识，注意培养观察、分析题目特征的能力.（责审　韩乐琴）